516 B 10

~~Cartan,~~ in Bouligand, ~~Geog~~

...ions de --- analytique.

1928.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PAR

Georges BOULIGAND

Ancien élève de l'École normale supérieure,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

AVEC UNE PRÉFACE

DE

M. CARTAN

Professeur de Géométrie supérieure
à la Sorbonne.

DEUXIÈME ÉDITION

mise au courant des méthodes vectorielles
et accrue d'importants compléments.

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

—

1928

PRÉFACE

L'évolution de la pensée géométrique dans le courant du siècle dernier, évolution qui a sa source dans les immortels travaux d'un géomètre français, Poncelet, a introduit au centre de la Géométrie moderne un point de vue nouveau, à savoir qu'il n'y a pas *une* Géométrie, mais *plusieurs* Géométries, dont chacune a son objet et ses méthodes propres. Pour nous borner au plan, à côté de la Géométrie élémentaire ou *métrique*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement, s'est édifiée la Géométrie *linéaire*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement et une projection cylindrique, puis la Géométrie *projective*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement et une projection conique ou une perspective. La théorie des axes des coniques appartient à la Géométrie métrique, celle des centres et des diamètres à la Géométrie linéaire, celle des pôles et polaires à la Géométrie projective. Dans un courant d'idées un peu différent s'est édifiée la Géométrie *conforme* ou de l'inversion, qui étudie les proprié-

tés des figures conservées par un déplacement, une homothétie et une inversion.

Historiquement ces différentes Géométries dérivent du tronc commun de la Géométrie élémentaire. Logiquement elles en sont tout à fait indépendantes ; la notion *projective* de rapport anharmonique par exemple ne repose qu'en apparence sur la notion *métrique* de longueur. Ce n'est pas ici le lieu de dire comment cette autonomie absolue des différentes Géométries s'est réalisée : elle ne l'a d'ailleurs été que par une évolution assez lente. En fait aujourd'hui, bien loin que la Géométrie projective, par exemple, soit regardée comme un chapitre particulier de la Géométrie métrique, c'est plutôt le contraire qui est exact : les propriétés *métriques* d'une figure ne sont que les propriétés *projectives* de la figure plus complète formée de la figure donnée et de deux points particuliers, les points cycliques à l'infini.

L'évolution dont il vient d'être question s'est faite parallèlement en Géométrie pure ou synthétique et en Géométrie analytique, les progrès de l'une réagissant sur ceux de l'autre et réciproquement. L'autonomie des différentes Géométries se traduit en Géométrie analytique dans les méthodes de calcul, et principalement dans le choix des systèmes de coordonnées utilisés. Si la Géométrie métrique emploie de préférence les coordonnées cartésiennes rectangulaires, la Géométrie linéaire emploie les coordonnées cartésiennes obliques, la Géométrie projective emploie les coordonnées homogènes, trilinéaires ou tétraédrales, et la Géométrie conforme de l'espace emploie les coordonnées

pentasphériques, qui ont conduit Darboux à de si beaux résultats. Chacun de ces systèmes de coordonnées repose sur la considération d'une figure de référence type, à savoir le trièdre trirectangle, le trièdre quelconque, le tétraèdre et la figure formée de cinq sphères orthogonales deux à deux. Le passage d'une figure de référence à une autre se traduit par les formules de changement de coordonnées : ces formules jouent un rôle fondamental dans chaque Géométrie, car les propriétés que cette Géométrie étudie sont précisément celles qui sont respectées par tout changement de coordonnées.

La découverte du principe de dualité, qui a habitué les géomètres à regarder l'espace comme engendré par d'autres éléments que des points (droites, plans, sphères, etc.) a élargi le champ d'action de la Géométrie analytique par l'introduction des coordonnées tangentielles, des coordonnées plückériennes, etc. On a été ainsi conduit à constater que des méthodes de calcul identiques s'appliquaient à des théories géométriques très diverses en apparence, et cela a été la source de progrès nouveaux.

Mais ces progrès auraient été paralysés en grande partie si l'on s'était borné à ne considérer que les éléments réels de l'espace, de même que la vraie théorie des équations algébriques serait complètement masquée si l'on ne voulait raisonner que sur des nombres réels. L'introduction en Géométrie des éléments imaginaires s'est donc imposée avec une nécessité croissante. Introduits d'abord d'une manière purement accessoire sous forme de couples de points (ou de droites, etc.) imaginaires conjugués afin

de mieux faire comprendre la Géométrie réelle, ils ont à leur tour gagné leur autonomie et sont maintenant étudiés pour eux-mêmes ; certaines Géométries nouvelles, comme la Géométrie *hermitienne*, n'auraient aucun sens sans eux.

De cette évolution complexe et qui n'est sans doute pas encore achevée, on ne voit pas, au moins en apparence, beaucoup de trace dans les programmes de mathématiques spéciales. Cependant ce n'est pas par l'effet du hasard que tous les cours de Géométrie analytique font usage des coordonnées homogènes dans la théorie des pôles et polaires, que tous se servent de coordonnées rectangulaires pour la recherche des axes des coniques et des quadriques, et que tous parlent du cercle imaginaire de l'infini. Il semble donc possible, tout en restant dans les limites du programme, de dégager pour les élèves l'essentiel de ce qui, dans le courant des idées géométriques modernes, peut être mis à leur portée. Plus franchement cela se fera, plus ils en tireront de profit, moins grand sera l'effort de mémoire nécessaire pour s'assimiler les matières du cours ; ils seront mieux armés, même pour passer des examens et y réussir, que s'ils sont encombrés de résultats mal reliés entre eux et ne se recommandant souvent que des prédilections, réelles ou supposées, de tel ou tel examinateur.

Le présent cours de Géométrie analytique est une tentative très intéressante de dégager ces idées essentielles dont j'ai parlé. Le but qu'a poursuivi l'auteur est de former l'esprit de l'élève et de se servir des matières à ensei-

gner pour l'aider à acquérir une culture mathématique proprement dite. D'une part il se maintient strictement dans les limites du programme et n'utilise qu'un appareil analytique très élémentaire ; il n'est presque pas fait usage de coordonnées obliques et la théorie des déterminants n'est supposée connue qu'à la fin du cours. Mais d'autre part il réussit, dans son chapitre sur les transformations géométriques, inspiré de la note classique de M. Borel sur le même sujet, à faire nettement comprendre aux élèves la distinction entre les propriétés métriques, les propriétés linéaires et les propriétés projectives des figures, et à leur montrer comment le choix des coordonnées à employer est lié à la nature des propriétés à étudier. Le rapport anharmonique est introduit à la suite des transformations homographiques de l'espace, de manière à en faire saisir la véritable signification ; les propriétés projectives les plus simples des coniques et des quadriques en sont le corollaire. La corrélation et les coordonnées tangentielles servent de base à la théorie des enveloppes et en simplifient l'exposé, tout en initiant l'élève à l'analogie qui existe entre les courbes et les surfaces développables. Enfin le problème de l'introduction des éléments imaginaires est abordé franchement et l'élève est à même de voir comment toutes les notions de la Géométrie réelle s'étendent légitimement aux éléments imaginaires introduits et peuvent être utilisées pour simplifier les démonstrations et, souvent, en faire saisir la véritable signification.

Un autre caractère du présent cours est l'appui que s'y

prêtent mutuellement le raisonnement géométrique et le calcul. L'auteur considère avec juste raison que la Géométrie pure et la Géométrie analytique ne sont pas deux sciences rivales dont chacune interdit à l'autre d'empiéter sur son domaine ; elles gagnent au contraire à s'éclairer l'une par l'autre.

Parmi les parties du livre qu'il y a lieu plus particulièrement de signaler au lecteur, je citerai l'étude de la forme d'une courbe réelle au voisinage d'un de ses points, avec une démonstration du théorème des fonctions implicites plus simple et plus complète qu'elle n'est donnée d'habitude ; — la démonstration du théorème de Bezout, où le nombre des points communs à deux courbes algébriques est obtenu en se ramenant au cas où les deux courbes sont décomposées en deux systèmes de droites, et où l'ordre de multiplicité de chaque point d'intersection est défini soigneusement ; — le paragraphe consacré aux courbes algébriques gauches. La partie relative aux courbes et surfaces du second ordre est considérablement allégée, la nature géométrique d'une telle ligne ou surface étant obtenue directement (dans le cas où elle est réelle), et la théorie des diamètres ne venant qu'ensuite. L'intersection de deux quadriques est étudiée assez à fond, et l'attention de l'élève est attirée sur l'importance d'une énumération exacte des conditions d'un problème pour la recherche de la solution.

L'auteur demande beaucoup à la collaboration de l'élève. Cette manière de faire présente des avantages certains pour les bons élèves, mais elle en présente aussi

pour les élèves moyens qui seraient guidés par le professeur : l'idéal à réaliser est du reste la collaboration simultanée de l'élève, du livre et du professeur. En l'espèce le livre rendra service au professeur lui-même : quant à l'élève, il le mettra en mesure d'aborder avec fruit, s'il le désire, la lecture d'ouvrages plus élevés, tels que le beau livre de Darboux sur les *Principes de la Géométrie analytique*.

Le Chesnay, 13 juin 1919.

E. CARTAN.

AVERTISSEMENT

La présente édition a été mise au courant des notations vectorielles dans l'esprit du nouveau programme de Mathématiques spéciales. Je l'ai accrue en outre de quelques compléments, destinés aux candidats à l'Agrégation : foyers et focales des quadriques, cubiques planes, cubiques gauches, complexes linéaires, courbes planes ou gauches du quatrième ordre, surfaces du troisième ou du quatrième ordre. Cet ensemble n'est qu'une esquisse, largement brossée, et rédigée d'après des leçons faites à mes étudiants.

M. Rabaté, chargé de conférences de Mathématiques générales à l'Université de Poitiers, a bien voulu relire, à ses rares loisirs, les épreuves de ce livre. Je lui en adresse mes plus affectueux remercîments.

G. B.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

INTRODUCTION

RAPPEL DE NOTIONS FONDAMENTALES RELATIVES AUX VECTEURS, AUX SEGMENTS, AUX ANGLES, AUX PROJECTIONS.

1. **Vecteur.** — Un vecteur est une portion de droite AB ayant une origine A et une extrémité B. Pour définir le vecteur AB, on peut encore se donner son *origine* A, sa *ligne d'action,* son *sens* sur cette droite, et enfin sa *grandeur,* qui sera toujours mesurée par un *nombre essentiellement positif.*

Segment. — De la notion de vecteur, apprenons à distinguer celle de segment : un segment est encore une portion de droite, mais l'origine et l'extrémité sont, cette fois, deux points d'un axe orienté qu'on doit préalablement donner. L'élève ne doit pas dire : « le segment AB » ; cette locution serait incomplète et dépourvue de sens. Il dira : « le segment AB de l'axe $x'x$ ». On appelle *mesure algébrique* du segment AB de l'axe $x'x$, et on représente par $\overline{AB}$, le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la mesure de la distance AB, et qui est affecté du signe + ou —, suivant que les sens AB et $x'x$ concordent ou se contrarient.

A partir de cette définition, on établit la *relation de Chasles,*

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KL}=\overline{AL},$$

où A, B, C, ..., K, L désignent des points disposés d'une manière quelconque sur $x'x$.

Application. — Soient, sur un axe $x'x$, quatre points A, B, C, D. Nous dirons que C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport à A et B, si l'on a, entre les valeurs algébriques des segments déterminés par ces points, la relation

$$(1) \qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Prenons sur $x'x$ une origine O quelconque et posons

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OC} = c, \qquad \overline{OD} = d.$$

Nous laissons à l'élève, en appliquant la formule de Chasles, le soin de transformer la relation (1) en la suivante :

$$(2) \qquad 2(ab + cd) = (a + b)(c + d);$$

sous cette nouvelle forme apparaît un caractère remarquable de *réciprocité :* si C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A, B, ces deux points le sont aussi par rapport à C et D.

Dans la suite, nous aurons l'occasion d'utiliser des formes de la relation (2) correspondant à un choix particulier de l'origine. Par exemple, si O est confondu avec A, on a

$$a = 0,$$

et la relation (2) nous donne

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Si O est confondu avec le milieu I de AB, nous aurons

$$\overline{IA}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

Cette relation nous montre que les points C et D sont situés d'un même côté du milieu I de AB. Si le point C tend vers le milieu I de AB, nous voyons que le point D s'éloigne indéfiniment sur l'axe $x'x$.

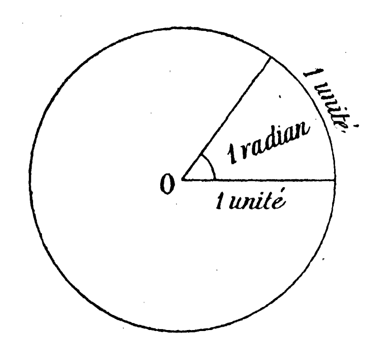
Projections. — Soient donnés un plan P et un axe orienté $x'x$. La projection sur $x'x$ d'un point M, parallèlement au plan P, est l'intersection de $x'x$ et du plan parallèle à P mené par M. Si P est perpendiculaire à $x'x$, on dit que la projection est *orthogonale*.

Soient le vecteur AB, a et b les projections de A et B sur $x'x$. Le segment ab de l'axe $x'x$ s'appelle projection du vecteur AB sur cet axe.

Soit un contour polygonal ABC... KL : il résulte du théorème de Chasles qu'on a, en projetant sur un axe $x'x$,

$$\text{pr. AB} + \text{pr. BC} + \cdots + \text{pr. KL} = \text{pr. AL}.$$

Angles et arcs. — Soient un cercle orienté, et sur sa circonférence deux points A et B. On représente par $\overset{\frown}{AB}$ l'un des nombres algébriques qui mesurent un chemin parcouru en partant de A, suivant le cercle et s'arrêtant en B. Un arc admet une infinité de déterminations. Soit α l'une d'elles : toutes les autres sont comprises dans la formule $\alpha + 2k\pi$.



Supposons que le rayon du cercle soit pris pour unité, et adoptons comme unité d'arc l'arc égal au rayon ou RADIAN : un arc et l'angle au centre correspondant sont alors mesurés par le même nombre.

Cela posé, soient, dans le plan préalablement orienté, deux axes dirigés $x'x$ et $y'y$: l'angle ayant pour *côté origine* $x'x$ et pour *côté extrémité* $y'y$ correspond, par définition, à l'un des arcs AB obtenus en menant, par le centre O du cercle trigonométrique, les demi-droites OA et OB respectivement parallèles à $x'x$, $y'y$ et de même sens. On écrit indifféremment

$$(\widehat{x'x, y'y}) = (\widehat{OA, OB}) = \overset{\frown}{AB}.$$

L'angle de deux axes ou de deux demi-droites, donnés dans un ordre connu, n'est donc lui-même défini qu'à un multiple près de 2π.

La relation de Chasles s'étend aux arcs et par suite aux angles, a condition d'introduire dans l'un des membres, s'il y a lieu, un multiple de 2π.

Le double énoncé du théorème des projections orthogonales. Soit $x'x$ l'axe sur lequel on projette orthogonalement. Pour l'élève, il est commode de distinguer entre la projection d'un vecteur et la projection d'un segment.

1° *Projection d'un vecteur.* — Soit le vecteur AB : la valeur algébrique de sa projection est donnée par

$$\overline{ab} = \mathrm{AB} \cos (\widehat{ax, \mathrm{AX}}),$$

AB étant essentiellement positif et AX étant la demi-droite d'action du vecteur, dans le sens de A vers B.

2° *Projection d'un segment.* — Soit le segment AB de l'axe X'X. La valeur algébrique de sa projection est donnée par

$$\overline{ab} = \overline{\mathrm{AB}} \cos (\widehat{ax, \mathrm{AX}}).$$

Suivant les cas, il sera commode d'appliquer le théorème sous la première ou sous la seconde forme.

1ª. Utilisation de grandeurs géométriques. — Lorsque deux vecteurs AB et CD sont égaux, parallèles et de même sens, on dit qu'ils sont *équipollents,* ou encore qu'ils ont même *grandeur géométrique.* On synthétise ainsi, dans la notion de grandeur géométrique, la direction, le sens et la grandeur arithmétique du vecteur : donner la grandeur géométrique revient à donner simultanément ces trois éléments.

On représente par **AB** la grandeur géométrique du vecteur d'origine A et d'extrémité B. On conserve le signe =, bien qu'il prenne ici une signification nouvelle, pour traduire l'égalité de deux grandeurs géométriques. En écrivant par exemple

$$\mathbf{AB} = \mathbf{CD}, \tag{3}$$

on exprime que les vecteurs AB et CD sont équipollents. En écrivant

$$\mathbf{AB} = m\mathbf{CD}, \tag{4}$$

où m est un coefficient quelconque, positif ou négatif, on exprime :

1° que les directions de AB et de CD sont parallèles ;

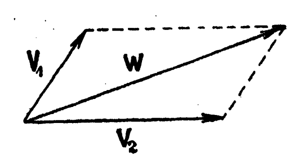
2° que les sens de ces vecteurs concordent si m est positif, se contrarient si m est négatif;

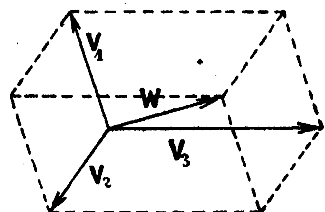
3° que le rapport de la grandeur arithmétique de AB à celle de CD est $|m|$.

Nous aurons donc désormais à marquer une distinction essentielle entre grandeurs ordinaires ou *scalaires*, d'une part, et grandeurs géométriques ou *dirigées*, d'autre part. Une masse, une durée sont des scalaires; une vitesse, une accélération, une force, sont par contre des grandeurs géométriques (¹).

De même que les scalaires sont soumis au calcul algébrique, on peut définir sur les grandeurs dirigées un certain nombre d'opérations, dont l'ensemble constitue le *calcul vectoriel.*

Nous sommes déjà familiers avec l'*addition géométrique* : bornons-nous donc à rappeler la règle du parallélogramme ou du parallélépipède, qui donne, par la diagonale de l'un ou





de l'autre, la somme géométrique de deux ou de trois vecteurs.

On écrit dans chacun des cas cités

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3.$$

Notons qu'ici (et de même toutes les fois que cela nous paraîtra opportun) nous représentons la grandeur géométrique d'un vecteur par une seule lettre, imprimée en caractères gras, et qu'on transcrit au tableau ou sur le papier en la surmontant d'une flèche. Nous conservons le signe (+) pour indiquer l'addition géométrique.

(¹) L'équation fondamentale

$$\mathbf{F} = m\gamma$$

de la dynamique, où m est la masse d'un point matériel, γ son accélération, $\mathbf{F}$ la force qui agit sur lui, est justement un exemple d'égalité géométrique de la forme (4).

A l'égalité géométrique

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2,$$

on peut substituer la suivante :

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{W} - \mathbf{V}_1,$$

qui exprime que $\mathbf{V}_2$ est la différence géométrique de $\mathbf{W}$ et de $\mathbf{V}_1$. Soient deux vecteurs OA et OB, de même origine O. Leur différence géométrique est précisément AB :

$$\mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \mathbf{AB}.$$

1^b. Vecteur unitaire d'un axe. — On appelle *vecteur unitaire* d'un axe un vecteur de longueur 1 ayant même direction et même sens que cet axe. Prenons sur un axe $x'x$ de vecteur unitaire u deux points A et B. Posons $m = \overline{AB}$, c'est-à-dire désignons par m la valeur algébrique du segment AB de l'axe $x'x$. On voit que l'on aura toujours l'égalité géométrique

$$\mathbf{AB} = mu.$$

1^c. Une application des opérations précédentes : notion de barycentre. — Soient les grandeurs géométriques $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_k$; désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des quantités scalaires. Nous avons appris à définir les grandeurs géométriques

$$m_1\mathbf{V}_1, \qquad m_2\mathbf{V}_2, \qquad \ldots, \qquad m_k\mathbf{V}_k.$$

Par addition géométrique, nous saurons définir

$$m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 + \cdots + m_k\mathbf{V}_k.$$

Nous sommes ainsi en possession d'un type général d'opération vectorielle, qui comprend l'addition et la soustraction géométriques [1], et qui nous servira constamment, lorsque nous aurons à nous occuper des coordonnées d'un point.

---

(1) On obtient cette opération en supposant $k = 2$, $m_1 = +1$ et $m_2 = -1$.

Pour le moment, nous en donnerons une autre application, en démontrant le théorème suivant :

Soient donnés les points M_1, M_2, ..., M_k, *affectés de coefficients* m_1, m_2, ..., m_k *tels que la somme algébrique*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

ne soit pas nulle. Le point G *défini par l'égalité géométrique*

$$(5)\ (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\mathbf{OM}_2 + \cdots + m_k\mathbf{OM}_k$$

est indépendant de la position du point O. On dit que G est le BARYCENTRE *des points* M_1, M_2, ..., M_k, *affectés respectivement des masses* m_1, m_2, ..., m_k.

Remarquons d'abord, d'après la restriction imposée à

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k,$$

que l'égalité (5) permet, le point O ayant été choisi, de construire sans ambiguïté le point G. Je dis que cette construction donne un résultat indépendant de O. En effet, considérons un autre point O'. Nous aurons

$$\mathbf{OM}_1 = \mathbf{OO}' + \mathbf{O'M}_1, \quad \ldots, \quad \mathbf{OM}_k = \mathbf{OO}' + \mathbf{O'M}_k.$$

Multiplions ces égalités respectivement par m_1, ..., m_k et ajoutons. Il vient, en portant au second membre de (5),

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\mathbf{OO}' + m_1\mathbf{O'M}_1 + \cdots + m_k\mathbf{O'M}_k,$$

et comme $\mathbf{OG} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O'G}$, il reste après simplification

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\mathbf{O'G} = m_1\mathbf{O'M}_1 + m_2\mathbf{O'M}_2 + \cdots + m_k\mathbf{O'M}_k,$$

ce qui démontre le théorème.

REMARQUES. — I. Si nous prenons seulement deux points M_1 et M_2, quelles que soient les masses m_1 et m_2 attribuées à ces deux points, leur barycentre sera situé sur la droite M_1M_2. Car, en prenant le point O sur cette droite, nous obtiendrons deux vecteurs OM_1 et OM_2 de même direction, donc OG aura également même direction, ce qui prouve que G est bien sur M_1M_2. Nous aurons

$$m_1\mathbf{GM}_1 + m_2\mathbf{GM}_2 = 0.$$

En donnant à m_1 et m_2 deux valeurs de même signe, et choisissant convenablement leur rapport, on pourra s'arranger de manière que G occupe toute position comprise entre M_1 et M_2 ; en donnant de même à m_1 et m_2 deux valeurs de signes contraires et dont les valeurs absolues soient entre elles dans un rapport convenablement choisi, on pourra s'arranger de manière que G vienne occuper, sur la droite M_1M_2, toute position extérieure au segment M_1M_2.

Pour $m_1 = m_2$, le point G occupe le milieu de ce segment. Pour m_1 fixe et m_2 tendant vers $-m_1$, ce point G s'éloigne indéfiniment sur la droite.

II. Si nous prenons trois points, M_1, M_2, M_3 non alignés, quelles que soient les masses m_1, m_2, m_3 attribuées à ces trois points, leur barycentre sera situé dans le plan $M_1M_2M_3$. Si m_1, m_2, m_3 sont tous de même signe, il se trouvera à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$. Si l'on a $m_1 = m_2 = m_3$, il sera au point de concours des médianes de ce triangle.

III. Si nous prenons quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 non situés dans un même plan, lorsque m_1, m_2, m_3, m_4 sont de même signe, le point G sera intérieur au tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$. Supposons

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4.$$

On peut alors écrire, quel que soit le point O,

$$\mathbf{OG} = \frac{\mathbf{OM_1} + \mathbf{OM_2} + \mathbf{OM_3} + \mathbf{OM_4}}{4} = \frac{3\dfrac{\mathbf{OM_1} + \mathbf{OM_2} + \mathbf{OM_3}}{3} + \mathbf{OM_4}}{4}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathbf{OM_1} + \mathbf{OM_2}}{2} + \dfrac{\mathbf{OM_3} + \mathbf{OM_4}}{2}}{2}$$

De ces différentes expressions égales à **OG**, la seconde nous fait apparaître G comme le barycentre d'une masse 1 placée en un sommet du tétraèdre et d'une masse 3 placée au point de concours des médianes de la face opposée; la troisième expression nous montre que G est le barycentre de deux masses égales placées chacune au milieu de deux arêtes opposées. D'où le théorème suivant :

Dans un tétraèdre, les droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées d'une part et les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées d'autre part concourent en un même point, qui se trouve sur les premières, aux trois quarts de leur longueur, et sur les autres, en leur milieu.

1d. Une opération en relation avec la projection orthogonale : produit scalaire de deux vecteurs. — La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe orienté est bien déterminée lorsqu'on connaît :

1° La grandeur géométrique du vecteur projeté ;

2° Celle du vecteur unitaire de l'axe de projection.

D'où l'idée d'introduire, lorsqu'on suppose donnés deux vecteurs, une fonction de leurs grandeurs géométriques dont la valeur s'obtient en multipliant les nombres positifs qui expriment les longueurs de ces deux vecteurs par le cosinus de leur angle (il s'agit ici d'une multiplication ordinaire).

Soit donc le vecteur AB de longueur l, le vecteur A'B' de longueur l' et soit θ l'angle que font deux demi-droites menées par un point arbitraire parallèlement à AB et à A'B'.

L'expression

$$ll' \cos \theta$$

constitue, par définition, le *produit scalaire* de **AB** et de **A'B'**. On la représente par la notation

$$\mathbf{AB} \,.\, \mathbf{A'B'}.$$

Si **A'B'** est un vecteur unitaire, le produit scalaire

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A'B'}$$

se réduit à la projection orthogonale du vecteur AB sur l'axe dont le vecteur unitaire est A'B'.

La dénomination de produit scalaire ne doit amener dans l'esprit du lecteur aucune confusion avec le produit, au sens usuel donné à ce mot en algèbre. Il s'agit ici d'une chose bien distincte. Toutefois, si l'on continue à utiliser le mot produit, c'est tout de même avec l'intention de rappeler que cette opération nouvelle possède certaines propriétés formelles rappelant celles de la multiplication. Les voici :

1° On a

$$\mathbf{AB} \,.\, \mathbf{A'B'} = \mathbf{A'B'} \,.\, \mathbf{AB},$$

ce qu'on résume en disant : *le produit scalaire est commutatif.*

Cela résulte immédiatement de sa définition et du fait que l'on a $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

2° Considérons les vecteurs $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ et un autre vecteur $\mathbf{V}'$ on a

$$(6) \qquad (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}' + \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}' + \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}',$$

les signes + indiquant, dans le premier membre, des additions géométriques, et, dans le second membre, des additions algébriques.

En effet, dans le cas où $\mathbf{V}'$ est un vecteur unitaire, le théorème classique sur la projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs (laquelle égale la somme algébrique des projections de ces vecteurs) rend évidente l'égalité ci-dessus. Dans le cas général, on aura, en désignant par u un vecteur unitaire, $\mathbf{V}' = mu$, et la relation proposée se justifie en remarquant que l'on a

$$\mathbf{U} \cdot mu = m(\mathbf{U} \cdot u).$$

Finalement la relation (6) est donc établie. On peut la résumer en disant: *le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition géométrique* [1].

Applications. 1° Soit le triangle ABC. Nous avons

$$\mathbf{BC} = \mathbf{BA} + \mathbf{AC},$$

d'où

$$\mathbf{BC} \cdot \mathbf{BC} = (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \cdot (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}),$$

c'est-à-dire, en remarquant que le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est le carré de sa longueur,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,\mathbf{BA} \cdot \mathbf{AC}$$
$$= \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC},$$

d'où la formule, établie ainsi en toute généralité (c'est-à-dire

---

[1] Voici un exemple de différence entre le produit scalaire et la multiplication ordinaire. Dans celle-ci, le nombre des facteurs peut être quelconque. Le produit scalaire n'est au contraire défini que pour deux vecteurs seulement.

sans qu'on ait à considérer divers cas de figure)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Reprenons l'égalité géométrique

$$\mathbf{BC} = \mathbf{BA} + \mathbf{AC}.$$

Faisons le produit scalaire des deux membres par **BC**. Il vient

$$\overline{BC}^2 = \mathbf{BA} \,.\, \mathbf{BC} + \mathbf{AC} \,.\, \mathbf{BC} = \mathbf{BA} \,.\, \mathbf{BC} + \mathbf{CA} \,.\, \mathbf{CB},$$

ou

$$a^2 = ac \cos B + ab \cos C,$$

ou finalement

$$a = c \cos B + b \cos C.$$

2° Soit S un point situé ou non dans le plan du triangle ABC. On a l'identité

$$(7) \qquad \mathbf{BC} \,.\, \mathbf{SA} + \mathbf{CA} \,.\, \mathbf{SB} + \mathbf{AB} \,.\, \mathbf{SC} = 0,$$

que l'on vérifie immédiatement en remplaçant **BC, CA, AB** par les différences géométriques de **SA, SB, SC,** convenablement associés deux à deux.

Notons encore que *la condition d'annulation du produit scalaire de deux vecteurs non nuls est l'orthogonalité de ces vecteurs.*

Cela posé, il résulte de la relation (7) le fait suivant : l'orthogonalité de SA et de BC d'une part, celle de SB et de CA d'autre part, entraîneront l'orthogonalité de AB et de SC.

Si S est dans le plan ABC, les deux relations

$$\mathbf{BC} \,.\, \mathbf{SA} = 0, \qquad \mathbf{CA} \,.\, \mathbf{SB} = 0$$

expriment que S est à l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC : la hauteur issue de A et la hauteur issue de B. Comme elles entraînent

$$\mathbf{AB} \,.\, \mathbf{SC} = 0,$$

S est donc aussi sur la hauteur issue de C. Donc, *les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Si S est extérieur au plan ABC, la figure SABC est un tétraèdre. L'orthogonalité des arêtes opposées SA et BC d'une part, celle des arêtes opposées SB et CA d'autre part, entraîne alors celle des arêtes opposées SC et AB de la troisième paire. Notons que si le tétraèdre SABC était quelconque, ses hauteurs ne seraient pas concourantes.

Pour que les hauteurs issues de S et de A soient dans un même plan, il faut et il suffit justement que les arêtes SA et BC soient orthogonales : nous en proposons la vérification au lecteur à titre d'exercice ; il verra par là que deux des trois relations surabondantes

$$\mathbf{BC} \cdot \mathbf{SA} = 0, \qquad \mathbf{CA} \cdot \mathbf{SB} = 0, \qquad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{SC} = 0$$

donnent un système de conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre hauteurs du tétraèdre soient concourantes.

CHAPITRE I

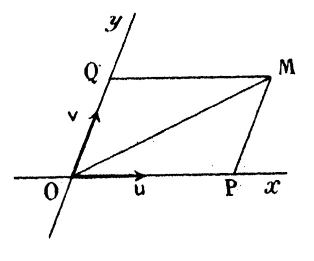
COORDONNÉES. — REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES LIGNES ET DES SURFACES.

---

2. On appelle *coordonnées* d'une figure un système de nombres qui la détermine entièrement.

Détermination d'un vecteur libre. — Lorsqu'on donne seulement la grandeur géométrique d'un vecteur, c'est-à-dire lorsque ce vecteur n'est connu qu'à une translation près, on dit que ce vecteur est un vecteur *libre* (sous-entendu : *de subir une translation*). Par opposition, on dit qu'un vecteur dont on connaît l'origine et l'extrémité est un vecteur *lié*.

Les opérations vectorielles dont nous nous sommes occupés aux n°s 1^{a} et suivants de l'Introduction sont relatives aux vecteurs libres. La notion de vecteur libre équivaut à celle de grandeur géométrique.



Pour déterminer un vecteur libre en géométrie plane, on se donne deux axes concourants $x'Ox$ et $y'Oy$, et on décompose le vecteur (auquel on a la latitude d'attribuer telle ou telle origine : nous choisirons donc le point O) en deux autres, portés par ces axes, d'après la règle du parallélogramme. Dans le cas

de la figure, nous serons ainsi amenés à la décomposition suivante du vecteur **OM** :

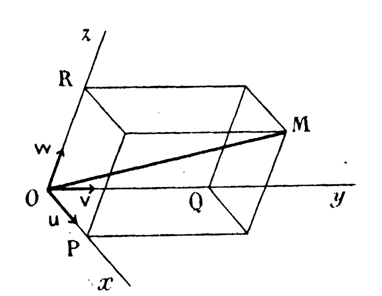
$$\mathbf{OM} = \mathbf{OP} + \mathbf{OQ}.$$

Le vecteur **OM** sera bien déterminé par la valeur algébrique du segment $\overline{OP}$ de l'axe $x'x$ et par celle du segment $\overline{OQ}$ de l'axe $y'y$. Désignons respectivement par x et par y les valeurs algébriques de ces deux segments ; par u et par v les vecteurs unitaires de l'axe $x'x$ et de l'axe $y'y$. La grandeur géométrique du vecteur **OM** nous est finalement donnée comme résultat de l'opération

$$xu + yv.$$

Au moyen de deux vecteurs unités, on exprime ainsi tous les vecteurs du plan.

On emploie le même processus pour déterminer un vecteur libre dans l'espace : on prend trois axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ formant un trièdre. On décompose **OM** suivant ces trois axes, d'après la règle du parallélépipède,



$$\mathbf{OM} = \mathbf{OP} + \mathbf{OQ} + \mathbf{OR}.$$

Appelant u, v, w les vecteurs unitaires de Ox, Oy, Oz, on se représente chaque vecteur libre comme le résultat d'une opération

$$xu + yv + zw.$$

Au moyen de trois vecteurs unités, on exprime ainsi tous les vecteurs de l'espace. Ici encore, les scalaires x, y, z désignent les valeurs algébriques des segments $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ sur leurs axes respectifs.

Remarques. — I. Il faut deux composantes x, y pour déterminer un vecteur libre dans le plan, trois composantes x, y, z pour déterminer un vecteur libre dans l'espace. Il en résulte qu'une égalité géométrique équivaudra à deux égalités ordinaires dans le plan, à trois égalités ordinaires dans l'espace.

II. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les vecteurs uni-

taires des axes ont la même longueur, ou, si l'on préfère, que l'unité de longueur est la même sur Ox, Oy, Oz. Cela n'est nullement indispensable.

III. Dans les applications, nous supposerons le plus souvent, non seulement qu'on a pris sur les axes la même unité de longueur, mais encore que ces axes sont *rectangulaires*, c'est-à-dire qu'ils forment un angle droit en géométrie plane, un trièdre trirectangle en géométrie dans l'espace. Le cas des *axes obliques* a peu d'intérêt pratique : il y a cependant des exceptions ; quoi qu'il en soit, les raisonnements et les principes de calcul que nous allons présenter ici offrent l'avantage de valoir indifféremment pour les axes rectangulaires ou les axes obliques.

3. La détermination d'un point et celle d'une direction vont se ramener à celle d'un vecteur libre (c'est pourquoi nous avons étudié tout d'abord la détermination du vecteur libre).

Détermination d'un point. — On prend un point fixe O et on ramène la détermination du point M à celle de la grandeur géométrique du vecteur OM.

DANS LE PLAN, on mène donc par le point O deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$, et on exprime **OM** en fonction de leurs vecteurs unitaires **u** et **v** sous la forme

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}.$$

Par définition (*fig.* de la page 13)

$$x = \overline{OP} = \textit{abscisse de M},$$
$$y = \overline{OQ} = \textit{ordonnée de M}.$$

On dit aussi que x, y sont les coordonnées cartésiennes de M dans le système d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. A un point M correspond une valeur unique pour x ; de même pour y ; inversement, à un système de valeurs x, y correspond un seul point M.

On convient que le sens positif des rotations est celui de Ox vers Oy, et pratiquement on dispose les axes de manière que ce sens soit l'inverse de celui des aiguilles d'une montre.

DANS L'ESPACE, on mène par le point O trois axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ tels que les demi-droites Ox, Oy, Oz *forment un trièdre*, et on exprime **OM** en fonction des vecteurs unitaires **u**, **v**, **w** de

ces axes sous la forme

$$\mathbf{OM} = xu + yv + zw.$$

Par définition (*fig.* de la page 14) les trois segments

$$x = \overline{OP} = \textit{abscisse de } M,$$

$$y = \overline{OQ} = \textit{ordonnée de } M,$$

$$z = \overline{OR} = \textit{cote de } M$$

constituent les coordonnées cartésiennes de M. A un point M répond un seul système de valeurs de x, y, z et inversement.

Nous supposerons le plus souvent que le trièdre $Oxyz$ est direct, c'est-à-dire que, le plan xOy étant regardé comme horizontal, et Oz se trouvant au-dessus de ce plan, le sens de Ox vers Oy dans la face supérieure du plan xOy s'oppose à celui des aiguilles d'une montre.

3ª. Détermination d'un point du plan par ses coordonnées polaires. — On peut encore définir un point du plan par ses coordonnées polaires. Prenons un point O appelé *pôle*, un axe orienté $x'x$ passant par O et que nous appelons *axe polaire* ; enfin fixons le sens positif des rotations autour de O. Par exemple, adoptons, comme précédemment, le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cela fait, considérons un point M, orientons arbitrairement la droite OM, et soit Oz l'axe ainsi obtenu. Le point M est déterminé si l'on donne

$$(\widehat{Ox, Oz}) = \omega \quad \text{et} \quad \overline{OM} = \rho.$$

Si Oz est de même sens que OM, ρ est positif et ω est connu à $2k\pi$ près. Si on change le sens de Oz, il faut changer ρ en $-\rho$ et modifier ω d'un multiple impair de π. Tout point a donc une infinité de coordonnées polaires. On peut les englober dans les expressions

$$\omega + n\pi, \quad (-1)^n\rho.$$

Soit $y'y$ un second axe mené par O, perpendiculairement à Ox et dont le sens est fixé par la condition

$$(\widehat{Ox, Oy}) = +\frac{\pi}{2}.$$

Étudions le passage des coordonnées cartésiennes rectangulaires, rapportées aux axes Ox, Oy, aux coordonnées polaires de pôle O et d'axe polaire $x'Ox$. Considérons le segment OM de l'axe Oz.

D'après le théorème des projections (projection d'un segment), nous avons

$$(1) \qquad x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega;$$

ces formules résoudraient la transformation des polaires en cartésiennes. Pour la question inverse, que nous étudions, il faut tirer ω et ρ des relations (1), où on suppose x et y donnés. On obtient immédiatement

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}, \qquad (3) \qquad \rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit ω_0, ρ_0 une solution des équations (1). Toute autre solution ω, ρ de ces équations est telle que

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_0, \qquad \rho \cos \omega = \rho_0 \cos \omega_0.$$

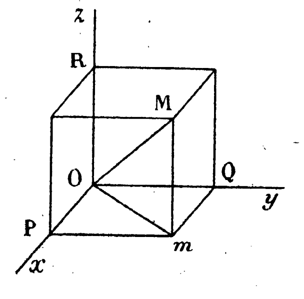
On déduit de là :

$$(4) \qquad \omega = \omega_0 + n\pi,$$

$$\cos \omega = (-1)^n \cos \omega_0,$$

$$(5) \qquad \rho = (-1)^n \rho_0.$$

Le calcul met donc aussi en évidence, comme le montrent les formules (4) et (5), l'indétermination des coordonnées polaires d'un point M, défini par son abscisse et son ordonnée.



3^b. Détermination d'un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques. — Partons de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. On peut définir un point M en donnant les coordonnées polaires ω, ρ de sa projection m sur le plan xOy et sa cote $OR = z$. Les trois nombres ω, ρ, z forment un système de *coordonnées cylindriques* du point M. Cette dénomination tire son

origine du fait que les surfaces où la coordonnée ρ demeure constante sont des cylindres de révolution d'axe Oz.

3c. Détermination d'un point de l'espace par ses coordonnées sphériques. — Enfin le point M de l'espace est également connu quand on donne :

1° la longueur $OM = r$, essentiellement positive ;

2° l'angle géométrique $\widehat{zOM} = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$;

3° l'angle algébrique $(\widehat{Oy, Om}) = \varphi$.

Les trois nombres r, θ, φ s'appellent *coordonnées sphériques* de M. Elles sont liées aux cartésiennes par les relations

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

L'élève en déduira que *la distance r du point* M *à l'origine*, en fonction des coordonnées cartésiennes de ce point, vaut

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4. Détermination d'une direction. — Pour connaître la direction d'une droite D, il suffit de connaître les composantes d'un vecteur porté par cette droite.

1° *Si* D *n'est pas orientée,* on prendra un vecteur quelconque porté par D ; ses composantes a, b, c forment par définition un système de *paramètres directeurs* de D. Il y a une infinité de tels systèmes : prenons-en un second arbitrairement, soit a', b', c'. On a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

(proportionnalité des composantes de deux vecteurs portés par la même droite).

2° *Si* D *est orientée,* on prend de préférence le vecteur unitaire de D, qui donne son sens en même temps que sa direction. *En coordonnées rectangulaires,* ses composantes seront

$$l = \cos(Ox, D), \qquad m = \cos(Oy, D), \qquad n = \cos(Oz, D),$$

D désignant ici la portion positive de notre droite. On dit, dans

ce cas, que l, m, n sont les *cosinus directeurs* de D. Ils sont liés par la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Une droite D non orientée porte deux axes. Les coordonnées étant toujours supposées rectangulaires, supposons donné un système a, b, c de paramètres directeurs de D. Soient l, m, n les cosinus directeurs de l'un des axes porté par D. Nous proposons d'établir les formules

$$l = \frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad m = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad n = \frac{\varepsilon c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

où ε a pour valeur $+1$ ou -1.

Remarque. — Ce qui précède s'applique au cas du plan en supprimant la troisième coordonnée. Supposons toujours les coordonnées rectangulaires et soit Ou un axe mené par O. Si l'on donne $(\widehat{Ox, Ou}) = \theta$, les cosinus directeurs de Ou seront

$$l = \cos\theta, \qquad m = \sin\theta.$$

5. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs. — Considérons deux vecteurs, $\mathbf{V}$ de composantes a, b, c et $\mathbf{V}'$ de composantes a', b', c'. En appelant u, v, w les vecteurs unitaires des axes de coordonnées, nous pourrons donc écrire

$$\mathbf{V} = au + bv + cw,$$
$$\mathbf{V}' = a'u + b'v + c'w.$$

Or à la faveur de l'égalité (6) du n° 1[d], nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' &= a'u \,.\, (au + bv + cw) + b'v \,.\, (au + bv + cw) \\ &\qquad + c'w \,.\, (au + bv + cw) \\ &= aa'\overline{u}^2 + bb'\overline{v}^2 + cc'\overline{w}^2 \\ &\qquad + (bc' + cb')v \,.\, w + (ca' + ac')w \,.\, u + (ab' + ba')u \,.\, v.\end{aligned}$$

Puisque u, v, w sont des vecteurs unitaires, nous aurons

$$\overline{u}^2 = \overline{v}^2 = \overline{w}^2 = 1.$$

Distinguons maintenant deux cas :

1° *Les axes sont rectangulaires.* On a alors

$$v \,.\, w = w \,.\, u = u \,.\, v = 0,$$

d'où

(1) $$\mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' = aa' + bb' + cc'.$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, on retrouve le carré de la longueur du vecteur $\mathbf{V}$:

(2) $$\overline{\mathrm{V}}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Sinon, désignons par θ l'angle, dont le cosinus est bien déterminé, de deux demi-droites dont l'une est parallèle à $\mathbf{V}$ et de même sens, l'autre parallèle à $\mathbf{V}'$ et de même sens. Nous aurons, en vertu de la définition du produit scalaire,

(3) $$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

(sans double signe). En particulier, la condition d'orthogonalité de deux directions dont l'une a pour paramètres directeurs a, b, c et l'autre a', b', c' est

(4) $$aa' + bb' + cc' = 0.$$

2° *Les axes sont obliques.* On applique le même principe de calcul que précédemment, qui dispense la mémoire d'intervenir. Désignons par λ, μ, ν les faces du trièdre $Oxyz$

$$\widehat{yOz} = \lambda, \qquad \widehat{zOx} = \mu, \qquad \widehat{xOy} = \nu.$$

Nous aurons

$$v \,.\, w = \cos\lambda, \qquad w \,.\, u = \cos\mu, \qquad u \,.\, v = \cos\nu,$$

et par suite

(1') $$\mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' = aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu.$$

Le carré de la longueur de $\mathbf{V}$ sera donc

(2') $$\overline{\mathrm{V}}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu$$

et l'on aura encore l'expression de $\cos\theta$ en divisant le second membre de (1') par le produit des longueurs de $\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$.

5bis. Introduction simultanée (*en axes obliques*) **des composantes d'un vecteur et de ses projections orthogonales.** — Reprenons les deux vecteurs

$$\mathbf{V} = au + bv + cw,$$
$$\mathbf{V}' = a'u + b'v + c'w.$$

Nous pouvons évidemment écrire

$$\mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' = a'u \,.\, \mathbf{V} + b'v \,.\, \mathbf{V} + c'w \,.\, \mathbf{V}.$$

Les trois produits scalaires $u \,.\, \mathbf{V}$, $v \,.\, \mathbf{V}$, $w \,.\, \mathbf{V}$ qui figurent dans cette formule expriment les valeurs algébriques des projections orthogonales de $\mathbf{V}$ sur les trois axes de coordonnées ; désignons-les par α, β, γ. Ces trois nombres déterminent le vecteur $\mathbf{V}$ aussi bien que ses composantes (1) et le produit scalaire de $\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$ prend maintenant la forme

$$(1'') \qquad \mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'.$$

Elle rappelle la forme simple (1) obtenue dans le cas des coordonnées rectangulaires, à cela près qu'on associe désormais les composantes de l'un des vecteurs et les projections orthogonales de l'autre. On peut écrire indifféremment

$$\mathbf{V} \,.\, \mathbf{V}' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c.$$

On aura donc en particulier

$$\mathrm{V}^2 = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

et *la condition d'orthogonalité prendra la forme simple*

$$(4'') \qquad \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0$$

ou

$$\alpha' a + \beta' b + \gamma' c = 0.$$

Somme toute, nous introduisons ainsi d'une manière simultanée deux modes de détermination d'un vecteur :

1° au moyen de ses composantes a, b, c ;

2° au moyen de ses projections orthogonales α, β, γ.

---

(1) En coordonnées rectangulaires, projections et composantes deviennent identiques.

Des premières, on passe aisément aux secondes. Nous aurons en effet

$$\mathbf{V} = au + bv + cw,$$

d'où, en conservant les notations pour les faces du trièdre $Oxyz$,

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = \mathbf{V} \,.\, u = a + b\cos\nu + c\cos\mu, \\ \beta = \mathbf{V} \,.\, v = a\cos\nu + b + c\cos\lambda, \\ \gamma = \mathbf{V} \,.\, w = a\cos\mu + b\cos\lambda + c. \end{cases}$$

En résolvant ces trois équations, on pourrait calculer a, b, c en fonction de α, β, γ.

Mais nous n'insisterons pas davantage : il nous suffit d'avoir montré que les principes dont nous préconisons l'emploi s'appliquent indifféremment en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées obliques. De ce paragraphe, nous retiendrons surtout la forme (4″) de la condition d'orthogonalité de deux directions.

6. **Coefficient angulaire.** — Cette notion n'intervient qu'en géométrie plane. Soit, dans le plan xOy, une droite Δ de paramètres directeurs a, b. Puisque tout autre système de paramètres directeurs de Δ est formé de nombres proportionnels à a et b, il suffit pour définir la direction de Δ, de donner le rapport $m = \dfrac{b}{a}$: on l'appelle *coefficient angulaire* de Δ. Orientons arbitrairement Δ et soit $u'u$ l'axe obtenu. L'angle $(\widehat{x'x, u'u})$ possède une infinité de déterminations, qui forment une progression de raison π. Sa tangente est donc bien définie : on a l'égalité

$$\operatorname{tg}\alpha = m = \frac{b}{a}.$$

Application : *calcul de* tg V. — Soient deux droites Δ et Δ_1 passant par O. Orientons-les arbitrairement, et soient Ou et Ou_1 leurs portions positives. Posons

$$(\widehat{Ox, Ou}) = \alpha, \qquad (\widehat{Ox, Ou_1}) = \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad (\widehat{Ou, Ou_1}) = \text{V}.$$

Tous les angles V diffèrent de l'un d'eux de $k\pi$; donc ils ont tous même tangente : celle-ci est facile à évaluer. Nous avons

$$\text{V} = \alpha_1 - \alpha + k\pi,$$

d'où

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha_1};$$

finalement,

$$\operatorname{tg} V = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

En particulier, pour que Δ et Δ_1 soient rectangulaires, il faut et il suffit que le dénominateur soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$mm_1 = -1.$$

7. Détermination d'une droite. — 1° *La droite est définie par deux de ses points* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *et* $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Appelons $M(x, y, z)$ le point de la droite tel que

$$\mathbf{MM}_1 + \lambda\mathbf{MM}_2 = 0 \tag{5}$$

(c'est-à-dire le barycentre de la masse 1 placée en M_1 et de la masse λ placée en M_2). L'égalité vectorielle (5) équivaut aux trois égalités ordinaires

$$x_1 - x + \lambda(x_2 - x) = 0,$$
$$y_1 - y + \lambda(y_2 - y) = 0,$$
$$z_1 - z + \lambda(z_2 - z) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Nous verrons qu'une méthode générale pour la représentation d'une ligne consiste à exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction d'un paramètre. Actuellement, ce paramètre est λ.

Nos formules n'ont pas de sens pour $\lambda = -1$; lorsque λ tend vers -1, le point M s'éloigne indéfiniment sur la droite. Pour $\lambda = 1$, le point M occupe le milieu de M_1M_2, lequel a pour coordonnées

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Tout celà s'applique indifféremment en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées obliques. Ajoutons que *deux valeurs*

opposées λ' *et* λ'' du *paramètre donnent deux points* M′ *et* M″ *conjugués harmoniques par rapport à* M_1 *et* M_2. C'est ce qui résulte de la comparaison des deux relations

$$\mathbf{M'M_1} + \lambda'\mathbf{M'M_2} = 0,$$

$$\mathbf{M''M_1} - \lambda'\mathbf{M''M_2} = 0.$$

Quel que soit le sens positif choisi sur la droite, il en découlera

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'M_2}} = -\frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''M_2}}.$$

Mêmes raisonnements en géométrie plane, à la suppression près de la troisième coordonnée.

2° *On donne un point de la droite et un vecteur porté par cette droite.* — Nous allons être conduits dans cette voie à un autre mode de représentation paramétrique de la droite. Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$ le point donné de la droite, a, b, c les composantes du vecteur M_1K. Appelons M (x, y, z) un point quelconque de la droite : nous aurons

$$\mathbf{M_1M} = \rho\mathbf{M_1K},$$

puisque les deux vecteurs $\mathbf{M_1M}$ et $\mathbf{M_1K}$ ont même direction. Nous prendrons pour paramètre la valeur du coefficient ρ, qui détermine la position du point M. Nous aurons, en décomposant suivant les trois axes,

$$x - x_1 = a\rho, \qquad y - y_1 = b\rho, \qquad z - z_1 = c\rho,$$

d'où l'on tire

$$x = x_1 + a\rho, \qquad y = y_1 + b\rho, \qquad z = z_1 + c\rho.$$

En prenant des coordonnées rectangulaires, et en choisissant pour M_1K un vecteur unitaire de la droite, ses composantes l, m, n seront les cosinus directeurs de l'axe porté par la droite et orienté suivant M_1K. Nous aurons alors, en représentant par ρ la valeur algébrique du segment $\overline{M_1M}$ de cet axe,

$$x = x_1 + l\rho, \qquad y = y_1 + m\rho, \qquad z = z_1 + n\rho.$$

Toutes ces formules s'appliquent dans le plan : on supprime la

troisième coordonnée. Appliquons ceci à une droite, orientée suivant le sens $u'u$ et telle que

$$(\widehat{x'x, u'u}) = \alpha.$$

En posant toujours $\overline{M'M} = \rho$, nous aurons

$$x = x_1 + \rho \cos \alpha, \qquad y = y_1 + \rho \sin \alpha.$$

8. Représentation des lignes et des surfaces. — 1° Une *ligne plane* est définie par une relation entre les coordonnées de l'un de ses points, qu'on nomme *l'équation de cette ligne,* soit

$$(1) \qquad y = \varphi(x) \qquad \text{ou} \qquad (1 \text{ bis}) \qquad F(x, y) = 0\,;$$

l'équation (1) définit y en fonction explicite de x, alors que (1 bis) la définit en fonction implicite.

On peut encore définir une courbe plane en donnant les coordonnées d'un de ses points en fonction d'un paramètre t, soit

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t).$$

Ce mode de définition (2) s'introduit tout naturellement en cinématique : t représente alors le temps. Le mode de définition (1) est un cas particulier du mode (2), puisqu'on peut substituer à l'équation (1) le système $x = t$, $y = \varphi(t)$. Si, utilisant des coordonnées polaires, on donne ρ en fonction de ω,

$$\rho = \varphi(\omega),$$

on en déduit immédiatement, en coordonnées rectangulaires, une représentation paramétrique de la courbe étudiée, à savoir

$$x = \varphi(\omega) \cos \omega, \qquad y = \varphi(\omega) \sin \omega.$$

2° Une *surface* est définie par une relation entre les trois coordonnées d'un de ses points, qui s'appelle *l'équation de la surface,* soit

$$(3) \qquad z = \varphi(x, y) \qquad \text{ou} \qquad (3 \text{ bis}) \qquad F(x, y, z) = 0\,;$$

la variable z se trouve définie dans (3) comme fonction explicite, et dans (3 bis) comme fonction implicite de x et y.

On peut aussi définir une surface en se donnant les coordon-

nées d'un de ses points en fonction de deux paramètres u et v, soient

$$(4) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Le mode de définition (3) rentre dans (4), car à l'équation (3) on peut substituer le système $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$.

3° Une *ligne de l'espace* peut être regardée comme l'intersection de deux surfaces

$$(5) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0.$$

Une parallèle quelconque à Oz rencontre cette courbe, pourvu qu'*une même valeur* de z satisfasse aux deux équations (5), lorsque x et y, dans ces équations, ont pour valeurs respectives l'abscisse et l'ordonnée de cette parallèle. Donc la projection de la courbe sur le plan xOy s'obtient en exprimant que les équations (5) ont une racine commune en z, c'est-à-dire en éliminant z entre ces équations [1].

On peut encore définir une ligne de l'espace en donnant les coordonnées d'un de ses points en fonction d'un paramètre. C'est ce que l'on fait en cinématique pour définir la trajectoire d'un mobile : le paramètre est alors le temps. Soient

$$(6) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

les équations qui fournissent la représentation paramétrique d'une courbe : la projection de cette courbe sur le plan xOy est alors manifestement déterminée par le système

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

Remarque. — Soit, en géométrie de l'espace, une relation entre deux seulement des coordonnées d'un point, telle que

$$(7) \qquad f(x, y) = 0.$$

Soit C la courbe du plan xOy définie par (7) : le lieu défini

---

[1] C'est là, en effet, la définition précise de l'élimination : éliminer ne consiste pas, comme le croient beaucoup d'élèves, à faire disparaître une ou plusieurs inconnues, par des combinaisons d'équations plus ou moins hasardeuses.

par (7) comprend les points de C et aussi tout point ayant même abscisse et même ordonnée qu'un point de C, quelle que soit sa cote. L'équation (7) est donc celle du *cylindre* dont la directrice est C et dont les génératrices sont parallèles à Oz.

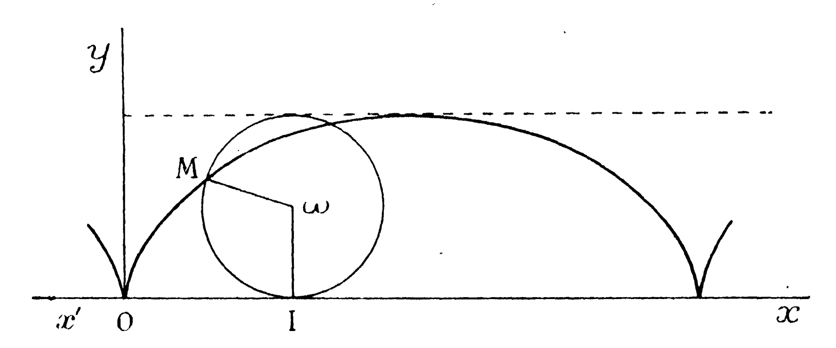
L'élève montrera de même qu'une relation telle que

$$F(x) = 0,$$

qui fait intervenir une seule coordonnée, représente un système de plans parallèles (à celui des yz dans l'exemple actuel). Donner également la signification d'une telle relation en géométrie plane.

9. Exercices. — Il importe de s'accoutumer à ces divers modes de représentation par quelques exemples. L'élève traitera utilement les suivants :

1° *Représentation paramétrique de la cycloïde.* — Soient deux axes



rectangulaires et un cercle de rayon constant R tangent à Ox en un point variable I. On prend sur sa circonférence un point M tel qu'on ait

$$\overset{\smile}{IM} = -\overline{OI};$$

autrement dit, le cercle roule *sans glissement* sur l'axe $x'x$. Le lieu du point M s'appelle une cycloïde. Pour en obtenir une représentation paramétrique, on pose

$$(\widehat{\omega M, \omega I}) = t.$$

On obtient les coordonnées x et y du point M, par application de la théorie des projections. On a

$$\text{pr. OM} = \text{pr. OI} + \text{pr. I}\omega + \text{pr. }\omega\text{M}.$$

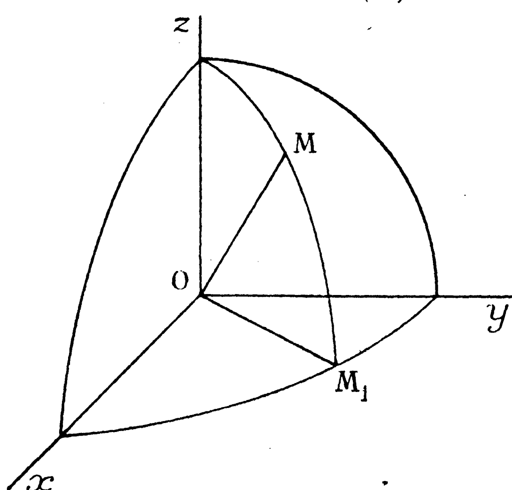
L'élève évaluera les angles mis en jeu pour le calcul des différentes projections, par une méthode indépendante des différents cas de figures, basée uniquement sur la formule de Chasles. Il écrira, par exemple,

$$(\widehat{\omega M, Ox}) = (\widehat{\omega M, \omega I}) + (\widehat{\omega I, Ox}) = t + \frac{\pi}{2}, \text{ etc.}$$

On trouve finalement

$$x = R(t - \sin t), \qquad y = R(1 - \cos t).$$

2° *Reconnaître la surface* $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$. — Un plan parallèle à xOy la coupe suivant une ou plusieurs droites qui s'appuient sur Oz. La surface est donc le lieu d'une droite rencontrant orthogonalement Oz et assujettie en outre à rencontrer la courbe



$$x = 1, \qquad z = f(y).$$

Nous bornant à ces indications, nous laissons à l'élève le soin d'approfondir.

3° *Exprimer paramétriquement les coordonnées d'un point d'une sphère.* — Soit une sphère, dont nous supposerons le centre à l'origine ; prenons sur cette sphère un point M et considérons le demi-méridien de M qui a ses extrémités sur Oz ; soit OM_1 sa trace sur xOy. En posant

$$u = (\widehat{Ox, OM_1}), \qquad v = \widehat{zOM}, \qquad (0 < v < \pi),$$

on obtiendra

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \sin v, \\ y &= R \sin u \sin v, \\ z &= R \cos v, \end{aligned}$$

formules que nous avons déjà données en parlant des coordonnées sphériques (n° 3).

En faisant dans les formules précédentes $u = u_0$ ou $v = v_0$, u_0 et v_0 désignant des constantes, on obtient des courbes particulières tracées sur la sphère : ce sont précisément les méridiens et les parallèles.

9ᵃ. Représentation d'une droite ou d'un plan. — Nous avons déjà donné, au n° 7, deux modes de représentation paramétrique d'une droite. Reportons-nous au second. Il se ramène à considérer la droite comme le lieu géométrique des points M tels que, le vecteur lié M_1K étant donné, le vecteur M_1M ait même direction que lui. Il faut et il suffit pour cela que les composantes de ces deux vecteurs soient proportionnelles :

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

La droite sera donc représentée par ces deux équations du premier degré en géométrie de l'espace, par une seule (obtenue en laissant subsister l'égalité des deux premiers rapports) en géométrie plane.

Considérons maintenant un plan déterminé par un point M_1 qui lui appartient et par un vecteur normal en ce point. Appelons M_1K ce vecteur et α, β, γ ses projections orthogonales (ce qui nous permettra d'obtenir un résultat valable indifféremment en coordonnées cartésiennes quelconques). Le plan est le lieu des points M tels que

$$\mathbf{M_1M}\,.\,\mathbf{M_1K}=0.$$

Il a donc pour équation

$$\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)=0.$$

Tout plan est donc représenté par une équation du premier degré. Inversement, une équation du premier degré

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (A, B, C \text{ non tous nuls})$$

représente un plan : soit en effet un point (x_1, y_1, z_1) dont les coordonnées satisfont à cette équation. Nous aurons

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

En retranchant membre à membre, nous pourrons écrire l'équation de la surface inconnue sous la forme

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Cette surface est donc le lieu des points M tels que $\mathbf{M_1M}$ soit

orthogonal au vecteur de *projections* (A, B, C) : elle est donc plane.

Pareillement, en géométrie plane, l'équation

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0$$

sera celle d'une droite menée par le point (x_1, y_1) perpendiculairement au vecteur de *projections* (α, β).

9^b. Représentation d'un cercle ou d'une sphère. — Une sphère de centre C et de rayon R est le lieu des points M tels que l'on ait

$$\overline{CM}^2 = R^2.$$

Soient a, b, c les coordonnées du point C, x, y, z celles du point M.

Nous avons

$$\mathbf{CM} = (x - a)u + (y - b)v + (z - c)w,$$

d'où

$$\overline{CM}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(y - b)(z - c)\cos\lambda + 2(z - c)(x - a)\cos\mu + 2(x - a)(y - b)\cos\nu.$$

L'équation de la sphère en coordonnées obliques sera donc

$$(\Sigma) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(y - b)(z - c)\cos\lambda + 2(z - c)(x - a)\cos\mu + 2(x - a)(y - b)\cos\nu = R^2.$$

Celle d'une circonférence sera de même, en appelant θ l'angle de Ox et de Oy,

$$(\Gamma) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\theta = R^2.$$

En coordonnées rectangulaires, ces équations se simplifient. Celle du cercle se réduit à

$$(\gamma) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

et celle de la sphère à

$$(\sigma) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

10. Changement de coordonnées. 1° Translation des axes. — Supposons que les nouveaux axes soient parallèles aux anciens et de même sens, c'est-à-dire que le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ formé par eux se déduise de $Oxyz$ par translation. Pour déterminer le deuxième système, il suffit de connaître les coordonnées a, b, c de son origine O_1 par rapport aux premiers axes.

Soit M un point quelconque. Appelons x, y, z ses coordonnées dans le premier système et x_1, y_1, z_1 ses coordonnées dans le second ; nous avons

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_1M},$$

d'où les formules cherchées

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1,$$
$$z = c + z_1.$$

Ceci s'applique naturellement au cas du plan, à la disparition près d'une égalité.

Exemple. — Soit une courbe ou une surface, rapportée à un système d'axes $Oxyz$. De tous les systèmes qui s'en déduisent par translation, on peut chercher celui qui donne la représentation analytique la plus simple de cette courbe ou de cette surface. Le lecteur est déjà familier avec certains problèmes de ce genre :

1° En géométrie plane, on peut disposer des deux paramètres arbitraires a et b (c'est-à-dire de la position arbitraire du point O_1) pour ramener les équations des courbes

$$(\mathcal{C}) \qquad y = Ax^2 + Bx + C,$$

$$(\mathcal{C}') \qquad y = \frac{Ax + B}{A'x + B'},$$

$$(\mathcal{C}'') \qquad y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = f(x)$$

aux formes simplifiées

$$(\mathcal{C}_1) \qquad y_1 = Ax_1^2, \qquad \left(a = -\frac{B}{2A}, \quad b = \frac{4AC - B^2}{4A}\right),$$

$$(\mathcal{C}'_1) \qquad x_1y_1 = \frac{BA' - AB'}{A'^2}, \qquad \left(a = -\frac{B'}{A'}, \quad b = \frac{A}{A'}\right),$$

$$(\mathcal{C}''_1) \qquad y_1 = Ax_1^3 + C_1x_1, \qquad \left(a = -\frac{B}{3A}, \quad b = f(a)\right).$$

L'élève effectue toutes ces simplifications sans effort de mémoire:

pour réduire l'équation de $(\mathcal{C})$, il applique la décomposition du trinome du second degré; en coordonnées rectangulaires, la courbe $(\mathcal{C})$ est une *parabole* [1], le point (a, b) pris pour nouvelle origine n'est autre que le sommet de la courbe. La courbe $(\mathcal{C}')$ possède une asymptote parallèle à Ox, dont l'ordonnée b est

$$\lim_{x=\infty} \frac{Ax+B}{A'x+B'} = \frac{A}{A'};$$

elle admet aussi une asymptote parallèle à Oy, dont l'abscisse a annule le dénominateur :

$$A'a + B' = 0.$$

On prendra ces deux asymptotes pour nouveaux axes.

Pour $(\mathcal{C}'')$, la réduction s'opérera de la manière suivante : la pente de la tangente est un trinome du second degré ; elle variera donc d'abord dans un certain sens, passera par un maximum ou un minimum, puis reprendra sa variation en sens contraire. L'abscisse de ce maximum ou de ce minimum s'obtient en annulant la dérivée seconde de $f(x)$, ce qui donne

$$6Aa + 2B = 0.$$

On aura ainsi un point de la courbe pour lequel la concavité change de sens, c'est-à-dire un *point d'inflexion*. C'est ce point qu'on prendra pour origine. Nous proposons de montrer qu'il est centre de symétrie de $(\mathcal{C}'')$, en utilisant la forme $(\mathcal{C}''_1)$.

2° *En coordonnées rectangulaires, et dans le plan, l'équation*

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0$$

représente un cercle ou sinon ne représente pas une courbe réelle.

Nous pouvons en effet l'écrire sous la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - d,$$

ou, par la translation $x = a + x_1$, $y = b + y_1$, sous la forme

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2 - d.$$

Si $a^2 + b^2 - d \geqslant 0$, l'équation représente un cercle (qui sera de *rayon nul* si $d = a^2 + b^2$). Si $a^2 + b^2 - d$ est < 0, il n'existe aucun point réel satisfaisant à l'équation en question.

3° *En coordonnées rectangulaires et dans l'espace, l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

représente une sphère, ou sinon ne représente pas une surface réelle.

---

[1] L'équation $(\mathcal{C}_1)$ est en effet de la forme $x_1^2 = 2py_1$, en posant $A = \frac{1}{2p}$.

En effet, la translation $x = a + x_1$, $y = b + y_1$, $z = c + z_1$ ramène encore l'équation à la forme

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Le centre a pour coordonnées a, b, c et $a^2 + b^2 + c^2 - d$ (qu'on doit supposer $\geqslant 0$) représente le carré du rayon.

11. 2° Changements d'axes conservant l'origine. — Soit O l'origine commune des deux systèmes d'axes. La détermination du point M a été ramenée à la formation d'une égalité géométrique

$$\mathbf{OM} = xu + yv + zw.$$

On écrira cette égalité dans chacun des deux systèmes d'axes. On aura dans le second système

$$\mathbf{OM} = x_1u_1 + y_1v_1 + z_1w_1.$$

Le problème sera résolu en égalant ces deux expressions de **OM** si l'on connaît les nouvelles unités vectorielles u_1, v_1, w_1 en fonction des anciennes u, v, w : or ce sont là, par essence même, les données du problème, car, pour le définir, il faut déterminer par rapport aux anciens axes les nouveaux, ce qu'on fera en donnant (exprimés en u, v, w) leurs vecteurs unitaires u_1, v_1, w_1. Cette méthode, qui consiste en un changement d'unités pur et simple, s'applique indifféremment dans le plan et dans l'espace. Nous allons en donner des exemples.

EXEMPLE I. — *On considère dans le plan deux axes obliques faisant entre eux l'angle θ. On prend pour nouveaux axes leurs bissectrices.*

Adoptons la disposition indiquée sur la figure. Nous aurons ici

$$u = u_1 \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + v_1 \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right),$$

$$v = u_1 \cos\frac{\theta}{2} + v_1 \sin\frac{\theta}{2}$$

et $$\mathbf{OM} = xu + yv = x_1u_1 + y_1v_1.$$

La première décomposition de **OM**, suivant u et v, peut se ramener à une décomposition en u_1 et v_1, par

l'emploi des deux formules initiales, définissant le changement d'unités. Nous aurons ainsi

$$x_1u_1 + y_1v_1 = (x+y)\cos\frac{\theta}{2}u_1 + (y-x)\sin\frac{\theta}{2}v_1.$$

Ces deux décompositions sont nécessairement identiques. Nous avons donc les formules cherchées

$$x_1 = (x+y)\cos\frac{\theta}{2}, \qquad y_1 = (y-x)\sin\frac{\theta}{2},$$

qui s'écrivent encore

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{y_1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{y_1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).$$

Par exemple, la courbe qui dans le système xOy s'écrit

$$xy = a^2$$

deviendra dans le nouveau

$$\frac{x_1^2}{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{y_1^2}{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1.$$

C'est donc une hyperbole.

La courbe d'équation non résoluble

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

(mais dont la symétrie en x, y montre que Ox_1 est axe de symétrie) s'écrira sous la forme

$$\frac{x_1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left[\frac{x_1^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{x_1^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{y_1^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\right] - \frac{3}{4}\left(\frac{x_1^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{y_1^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) = 0.$$

Nous proposons l'étude de cette courbe, en résolvant son équation par rapport à y_1, qui n'y figure plus que par son carré (1).

Exemple II. — *On prend dans l'espace un trièdre de coordonnées dont les trois faces sont égales à un même angle* θ. *On prend pour axe*

---

(1) En posant $y = tx$, on obtient une représentation paramétrique rationnelle de la courbe initiale

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Oz_1 la demi-droite[1] *faisant des angles aigus égaux avec les trois arêtes, pour axe Ox_1 la projection sur le plan perpendiculaire à Oz_1 de la bissectrice intérieure de l'angle yOz, pour axe Oy_1 sa bissectrice extérieure.*

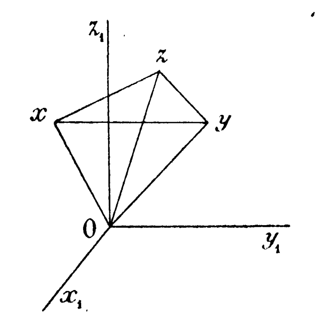
Désignons par α la valeur commune des angles aigus que Oz_1 fait avec Ox, Oy, Oz. Les demi-droites Ox, Oy, Oz ont pour projections sur le plan x_1Oy_1 trois demi-droites faisant deux à deux des angles de 120°. Nous pouvons donc écrire

$$u = u_1 \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha - v_1 \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha + w_1\cos\alpha,$$

$$v = u_1 \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha + v_1 \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha + w_1\cos\alpha,$$

$$w = -u_1\sin\alpha \qquad\qquad + w_1\cos\alpha.$$

La relation qui lie θ et α s'obtient en écrivant par exemple



$$v \,.\, w = \cos\theta,$$

ce qui donne

$$\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \cos\theta,$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Pour avoir des calculs rationnels (il ne faut jamais être esclave des données d'un problème), nous conserverons de préférence l'angle α.

Ecrivons encore

$$\mathbf{OM} = xu + yv + zw = x_1u_1 + y_1v_1 + z_1w_1.$$

En vertu des formules initiales, nous aurons encore

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \left[(x+y)\cos\frac{\pi}{3} - z\right]\sin\alpha,\\ y_1 &= (y-x)\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3},\\ z_1 &= (x+y+z)\cos\alpha.\end{aligned}\right.$$

---

(1) Cette droite est pour le trièdre un *axe ternaire*, c'est-à-dire qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de cette droite superpose le trièdre à lui-même.

Ecrivons la première et la dernière

$$(x+y)\cos\frac{\pi}{3} - z = \frac{x_1}{\sin\alpha},$$

$$x+y+z = \frac{z_1}{\cos\alpha},$$

d'où, en additionnant,

$$x+y = \frac{2}{3}\left(\frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{z_1}{\cos\alpha}\right);$$

écrivons maintenant l'équation jusqu'ici omise,

$$x-y = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y_1}{\sin\alpha};$$

nous pourrons calculer très aisément x, y, z.

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{3\sin\alpha} - \frac{y_1}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \frac{z_1}{3\cos\alpha}, \\ y &= \frac{x_1}{3\sin\alpha} + \frac{y_1}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \frac{z_1}{3\cos\alpha}, \\ z &= -\frac{2x_1}{3\sin\alpha} \qquad\qquad\quad + \frac{z_1}{3\cos\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Par exemple, après ce changement de coordonnées, les équations des surfaces

(S) $$yz + zx + xy = a^2,$$

(S′) $$yz + zx + xy = -a^2,$$

(S″) $$xyz = a^3,$$

(S‴) $$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$

(S^{IV}) $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

deviendront respectivement

(S_1) $$\frac{x_1^2 + y_1^2}{3\sin^2\alpha} - \frac{z_1^2}{3\cos^2\alpha} + a^2 = 0,$$

(S_1') $$\frac{x_1^2 + y_1^2}{3\sin^2\alpha} - \frac{z_1^2}{3\cos^2\alpha} - a^2 = 0,$$

(S_1'') $$\left[\left(\frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{z_1}{\cos\alpha}\right)^2 - \frac{3y_1^2}{\sin^2\alpha}\right]\left(\frac{z_1}{\cos\alpha} - \frac{2x_1}{\sin\alpha}\right) = 27a^3,$$

(S_1''') $$2\left(\frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{z_1}{\cos\alpha}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{z_1}{\cos\alpha}\right)18\frac{y_1^2}{\sin^2\alpha}$$
$$+\left(\frac{z_1}{\cos\alpha} - \frac{2x_1}{\sin\alpha}\right)^3 = 27a^3,$$

(S_1^{IV}) $$\frac{z_1}{\cos\alpha}\,\frac{x_1^2 + y_1^2}{3\sin^2\alpha} = a^3.$$

On voit que les équations S_1, S'_1, S_1^{IV} sont de la forme

$$\varphi(z_1,\ x_1^2 + y_1^2) = 0\,;$$

elles établissent une relation entre la distance d'un point au plan x_1Oy_1 et sa distance à l'axe Oz_1. Donc S, S′, S^{IV} sont des surfaces de révolution autour de l'axe Oz_1. Pour obtenir leurs méridiennes, il suffit de les couper par le plan x_1Oz_1 ($y_1 = 0$), ce qui donne les courbes

$$(\mu) \qquad \frac{x_1^2}{\sin^2\alpha} - \frac{z_1^2}{\cos^2\alpha} + 3a^2 = 0,$$

$$(\mu') \qquad \frac{x_1^2}{\sin^2\alpha} - \frac{z_1^2}{\cos^2\alpha} - 3a^2 = 0,$$

$$(\mu^{IV}) \qquad x_1^2 z_1 - 3a^3 \cos\alpha \sin^2\alpha = 0.$$

On voit ainsi que les surfaces S et S′ s'obtiennent respectivement en faisant tourner une hyperbole soit autour de son axe transverse, ce qui donne S, soit autour de son axe non transverse, ce qui donne S′. On construira aisément, en résolvant son équation par rapport à z_1, la méridienne de S^{IV}.

Nous engageons le lecteur à reprendre une rédaction autonome des problèmes suivants :

Construire la section par le plan $x + y + z = 0$ d'une des surfaces définies dans le premier système par les équations S″ et S‴.

Après le changement de coordonnées précédent, on a de suite l'équation de la courbe de section dans son plan, en faisant $z_1 = 0$. Cela donne pour S″ la courbe

$$2x_1(x_1^2 - 3y_1^2) + 27a^3 \sin^3\alpha = 0,$$

ou encore, en passant à des coordonnées polaires ($x_1 = \rho \cos\omega$, $y_1 = \rho \sin\omega$)

$$2\rho^3 \cos 3\omega + 27a^3 \sin^3\alpha = 0.$$

Pareillement, pour S‴, nous aurons la section

$$2x_1(x_1^2 - 3y_1^2) + 9a^3 \sin^3\alpha = 0.$$

Cela montre incidemment que les surfaces

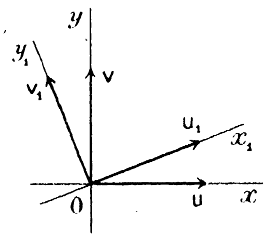
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$
$$3xyz = a^3$$

ont même section par le plan $x + y + z = 0$. Cela découle *a priori* de l'identité

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy).$$

12. EXEMPLE III. — *Passage d'un système de deux axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires qui s'en déduit par rotation.*

Soit $(\widehat{Ox, Ox_1}) = \alpha$ l'angle de cette rotation. Les formules de changement d'unités sont ici



$$u_1 = u \cos\alpha + v \sin\alpha,$$
$$v_1 = u \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + v \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Nous aurons

$$\mathbf{OM} = xu + yv = x_1u_1 + y_1v_1\,;$$

remplaçons u_1 et v_1 par les valeurs précédentes. Nous aurons deux décompositions de **OM** suivant u et v. En les identifiant, il vient

$$\text{(T)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

Ces formules étant d'un usage fréquent, il importe d'être en état de les écrire rapidement. Leur résolution en x_1, y_1 est facile : on en a immédiatement le résultat en remarquant qu'on peut passer du système Ox_1y_1 au système Oxy par la rotation $-\alpha$. On a donc

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 &= x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Notons que le principe appliqué au calcul de x, y en fonction de x_1, y_1 est par excellence celui de la démonstration des formules $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$; en effet, supposons que M soit situé sur le cercle trigonométrique et posons

$$(Ox_1, OM) = \beta, \qquad \text{d'où} \qquad (\widehat{Ox, OM}) = \alpha + \beta.$$

Les coordonnées de M seront $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ dans le système xOy ; et $\cos\beta$, $\sin\beta$ dans le système x_1Oy_1.

Les formules (T) de transformation des coordonnées se réduisent alors à

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta \, \mathit{cos}\,\alpha - \sin\beta \, \mathit{sin}\,\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta \, \mathit{sin}\,\alpha + \sin\beta \, \mathit{cos}\,\alpha.$$

Cette remarque donne le meilleur moyen pour retenir les formules (T) : les coefficients de x_1, y_1 dans leurs seconds membres sont précisément ceux de cos β, sin β dans les seconds membres des formules d'addition des arcs.

12[bis]. EXEMPLE IV. — Soit $Oxyz$ un premier trièdre trirectangle de coordonnées. Prenons trois nouveaux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 formant un second trièdre trirectangle : demandons-nous d'abord s'il existe, autour d'une droite issue de O comme axe, une rotation amenant le second trièdre sur le premier.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux trièdres soient de *même sens*.

La condition est nécessaire : une rotation ne saurait modifier le sens d'un trièdre. Elle est suffisante : avec précision, si les deux trièdres trirectangles $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont de même sens, on peut, par une rotation et une seule autour d'un axe issu de O, superposer le premier au second, de manière que Ox vienne sur Ox_1, Oy sur Oy_1, et Oz sur Oz_1. Il suffit, pour établir cette proposition, de montrer qu'on peut simultanément faire coïncider, par une telle rotation, Ox avec Ox_1 et Oy avec Oy_1 : à cause de la communauté de sens des deux trièdres, Oz s'appliquera sur Oz_1. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier cette superposition par rotation, de deux angles droits xOy et x_1Oy_1 de même sommet ; l'axe Δ de cette rotation s'obtient en général par l'intersection des plans P et Q, menés perpendiculairement aux plans xOx_1 et yOy_1 par les bissectrices intérieures de ces angles. Toutefois, il peut arriver que P et Q se confondent : l'axe cherché est alors la droite commune au plan de symétrie des deux angles droits et aux plans de chacun de ces angles ([1]).

Si les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont de sens opposés, le second a même orientation que le symétrique du premier par rapport au point O. On peut dire alors qu'on déduit $Ox_1y_1z_1$ de $Oxyz$ par une symétrie suivie d'une rotation.

Dans ce qui va suivre, nous ne nous préoccuperons pas de savoir si nos deux trièdres sont ou non de même sens. Les

---

([1]) Au lieu d'aborder directement cette question, l'élève pourra étudier d'abord la rotation d'un angle droit xOy autour d'un axe passant par O : l'axe est en général en dehors du plan de l'angle droit et alors de deux positions de cet angle on peut déduire des plans P et Q qui déterminent l'axe. Ou bien, l'axe est dans le plan de l'angle droit, etc...

résultats que nous allons obtenir s'appliqueront *en particulier* au cas où il s'agit d'une simple rotation.

Pour déterminer le trièdre $Ox_1y_1z_1$ par rapport au premier système, donnons-nous les cosinus directeurs de ses arêtes : à savoir a, b, c pour Ox_1, a', b', c' pour Oy_1, a'', b'', c'' pour Oz_1. Si nous écrivons le tableau

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	a	b	c
Oy_1	a'	b'	c'
Oz_1	a''	b''	c''

chaque élément représente le cosinus de l'angle des deux demi-droites inscrites en regard de la ligne et de la colonne qui se croisent sur cet élément.

Comme l'ordre de deux demi-droites est sans influence sur le cosinus de leur angle, ce tableau, qui, lu horizontalement, nous donnait les cosinus des arêtes du second trièdre par rapport au premier, donne, par lecture verticale, les cosinus des arêtes du premier par rapport au second.

D'après une propriété des cosinus directeurs d'un axe, nous avons les trois relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

Nous avons en outre, en exprimant l'orthogonalité des arêtes du second trièdre prises deux à deux,

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$
$$a''a + b''b + c''c = 0,$$
$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Les neuf nombres a, b, ..., c'' ne sont donc pas indépendants : ils sont liés par les six relations précédentes, d'ailleurs

distinctes. Avant d'aborder le problème de la transformation des coordonnées, remarquons que, grâce aux propriétés du tableau des neuf cosinus, on peut écrire également les six relations suivantes :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad ca + c'a' + c''a'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$

qui expriment des propriétés des arêtes du premier trièdre rapportées au second. Ces six dernières relations sont des conséquences algébriques des six premières : car celles-ci sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence d'un trièdre trirectangle $Ox_1y_1z_1$, dont les arêtes ont respectivement pour cosinus directeurs les nombres a, b, ..., c'', par rapport au trièdre $Oxyz$.

Cela posé, les formules définissant le changement de vecteurs unités sont ici

$$u_1 = au + bv + cw,$$
$$v_1 = a'u + b'v + c'w,$$
$$w_1 = a''u + b''v + c''w.$$

Écrivons encore

$$\mathbf{OM} = xu + yv + zw = x_1u_1 + y_1v_1 + z_1w_1\,;$$

en remplaçant dans cette dernière expression u_1, v_1, w_1 par leurs valeurs en u, v, w, nous aurons deux décompositions de **OM** suivant u, v, w. Identifions-les. Nous aurons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y &= bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z &= cx_1 + c'y_1 + c''z_1. \end{aligned} \right.$$

La géométrie permet de prévoir le résultat fourni par la résolution de ces équations en x_1, y_1, z_1 ; les nouvelles formules résoudraient en effet le problème inverse du problème actuel, à savoir : passage du trièdre $Ox_1y_1z_1$ au trièdre $Oxyz$. A cause de la réciprocité du tableau des neuf cosinus, nous avons donc

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz, \\ y_1 &= a'x + b'y + c'z, \\ z_1 &= a''x + b''y + c''z. \end{aligned} \right.$$

13. 3° **Cas général de la transformation des coordonnées.** — Nous passons d'un premier trièdre $Oxyz$ à un second trièdre $O_1x_1y_1z_1$. Nous aurons ici

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_1M},$$

ou, en appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées de O_1 par rapport au premier trièdre,

$$(1)\quad xu + yv + zw = x_0u + y_0v + z_0w + x_1u_1 + y_1v_1 + z_1w_1.$$

Pour connaître les directions des arêtes du second trièdre, il faut donner les décompositions de u_1, v_1, w_1 suivant u, v, w

$$u_1 = au + bv + cw,$$
$$v_1 = a'u + b'v + c'w,$$
$$w_1 = a''u + b''v + c''w.$$

En portant ces valeurs dans le second membre de la relation (1), nous aurons deux décompositions de **OM** suivant u, v, w lesquelles nous donnent par identification

$$x = x_0 + ax_1 + a'y_1 + a''z_1,$$
$$y = y_0 + bx_1 + b'y_1 + b''z_1,$$
$$z = z_0 + cx_1 + c'y_1 + c''z_1.$$

Il importe de remarquer que les premiers membres sont du premier degré en x_1, y_1, z_1.

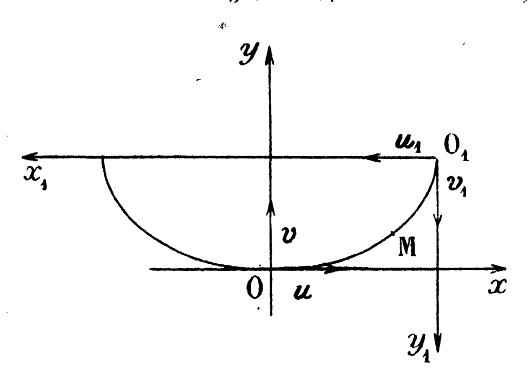
En géométrie plane, lorsqu'on opère un changement d'axes rectangulaires, on adopte en général la même orientation pour les deux systèmes, et on obtient les formules

$$x = A + x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta,$$
$$y = B + x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta.$$

L'élève cherchera comment il faut modifier ces formules pour les adapter à deux systèmes de sens contraires.

Exemples. — 1° *Former les équations paramétriques d'une cycloïde en prenant comme origine le point de moindre courbure, comme axe Ox la tangente en ce point et comme axe Oy la demi-droite perpendiculaire à Ox vers la concavité de la courbe.* (Nous apprendrons qu'il y a minimum de courbure en chaque point où la tangente est parallèle à la base.)

Soit R le rayon du cercle générateur. On sait que, en prenant pour axes O_1x_1 et O_1y_1, on a, pour les coordonnées x_1, y_1 d'un point M de la courbe, les expressions



$$x_1 = R(\theta - \sin\theta),$$
$$y_1 = R(1 - \cos\theta),$$

où la signification du paramètre θ est bien connue ([1]).

Soient u, v les vecteurs unitaires sur les axes Ox, Oy

Soient u_1, v_1 les vecteurs unitaires sur les axes O_1x_1, O_1y_1.

On a $\qquad u_1 = -u \quad$ et $\quad v_1 = -v$,

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_1M}, \qquad \mathbf{OO_1} = \pi R u + 2Rv,$$
$$\mathbf{O_1M} = x_1u_1 + y_1v_1 = -x_1u - y_1v,$$

d'où
$$\mathbf{OM} = (\pi R - x_1)u + (2R - y_1)v,$$
$$\mathbf{OM} = [\pi R - R(\theta - \sin\theta)]u + [2R - R(1 - \cos\theta)]v = xu + yv,$$

d'où
$$\begin{cases} x = R(\pi - \theta + \sin\theta), \\ y = R(1 + \cos\theta). \end{cases}$$

En posant $\pi - \theta = \tau$, les équations paramétriques s'écrivent

$$\begin{cases} x = R(\tau + \sin\tau), \\ y = R(1 - \cos\tau). \end{cases}$$

2° *On considère les équations*

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = R\varphi \operatorname{tg}\alpha$$

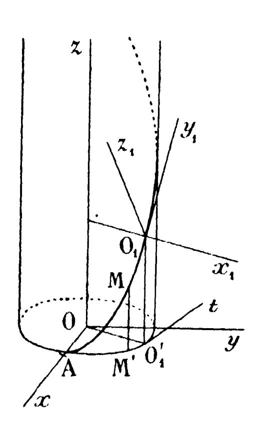
avec
$$R > 0, \qquad \frac{\pi}{2} > \alpha > 0.$$

Montrer qu'elles représentent une hélice circulaire.

On prend pour nouvelle origine un point O_1 de cette courbe, pour axe O_1x_1 la demi-normale extérieure au cylindre, pour axe O_1y_1 la demi-tangente à la courbe en O_1 dans le sens des φ croissants, pour axe O_1z_1 la demi-droite telle que le trièdre

([1]) Voir page 28. (Le paramètre a été désigné par t au lieu de θ.)

$O_1x_1y_1z_1$ *soit égal au trièdre* $Oxyz$. *Calculer, dans le nouveau système d'axes, les coordonnées d'un point de l'hélice correspondant à la valeur* φ *du paramètre initial, en fonction de*



$$\psi = \varphi - \beta,$$

β *désignant la valeur de* φ *qui fournit* O_1.

La courbe, projetée sur xOy suivant la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$, est tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz. En prenant sur cette courbe un point M, projeté sur xOy en M', on a $\varphi = (\widehat{Ox, OM'})$. L'équation $z = R\varphi \operatorname{tg} \alpha$ peut s'écrire $\overline{M'M} = \breve{AM'} \operatorname{tg} \alpha$. Un développement du cylindre (fendu suivant la génératrice de A) transformera donc la courbe en une droite coupant sous l'angle α le développement d'une section droite. Cette courbe est donc bien une hélice. Son pas est $2\pi R \operatorname{tg} \alpha$.

Les coordonnées de O_1 sont $R \cos \beta$, $R \sin \beta$, $R\beta \operatorname{tg} \alpha$.

Exprimons les vecteurs unités u_1, v_1, w_1 en fonction de u, v, w. Soit t le vecteur unité de la tangente à la circonférence section droite, au point O'_1, dans le sens des φ croissants. Le vecteur u_1 est parallèle au plan xOy et l'on a $(u, u_1) = \beta$. Donc

$$u_1 = u \cos \beta + v \sin \beta.$$

D'autre part, dans le plan orienté des y_1z_1, nous avons

$$(t, v_1) = \alpha, \qquad (t, w_1) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$v_1 = t \cos \alpha + w \sin \alpha,$$
$$w_1 = -t \sin \alpha + w \cos \alpha,$$

d'ailleurs, en vertu de $(u, t) = \beta + \frac{\pi}{2}$ (plan xOy), nous avons

$$t = -u \sin \beta + v \cos \beta,$$

d'où finalement

$$u_1 = u \cos \beta + v \sin \beta,$$
$$v_1 = -u \cos \alpha \sin \beta + v \cos \alpha \cos \beta + w \sin \alpha,$$
$$w_1 = u \sin \alpha \sin \beta - v \sin \alpha \cos \beta + w \cos \alpha.$$

Écrivons maintenant que

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_1M},$$

ou

$$xu + yv + zw$$
$$= R\cos\beta u + R\sin\beta v + R\beta \operatorname{tg}\alpha w + x_1u_1 + y_1v_1 + z_1w_1.$$

Remplaçons u_1, v_1, w_1 en fonction de u, v, w et identifions les deux décompositions obtenues. Il vient

$$\begin{aligned} x - R\cos\beta &= x_1\cos\beta + \sin\beta(-y_1\cos\alpha + z_1\sin\alpha), \\ y - R\sin\beta &= x_1\sin\beta + \cos\beta(y_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha), \\ z - R\beta\operatorname{tg}\alpha &= \qquad\qquad y_1\sin\alpha + z_1\cos\alpha. \end{aligned}$$

On tire des deux premières

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\beta + y\sin\beta - R, \\ y_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha &= -x\sin\beta + y\cos\beta ; \end{aligned}$$

en associant cette équation avec la troisième du groupe précédent, il vient

$$\begin{aligned} y_1 &= (-x\sin\beta + y\cos\beta)\cos\alpha + (z - R\beta\operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha, \\ z_1 &= (x\sin\beta - y\cos\beta)\sin\alpha + (z - R\beta\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Portons dans les valeurs de x_1, y_1, z_1 les valeurs

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = R\varphi\operatorname{tg}\alpha.$$

Il vient (en posant $\varphi - \beta = \psi$)

$$\begin{aligned} x_1 &= R(\cos\psi - 1), \\ y_1 &= \frac{R}{\cos\alpha}(\sin\psi\cos^2\alpha + \psi\sin^2\alpha), \\ z_1 &= \frac{R}{\sin\alpha}(\psi - \sin\psi). \end{aligned}$$

Il importe de remarquer que ces formules sont indépendantes de β : autrement dit, en faisant varier le point O_1, la figure formée par les axes $O_1x_1y_1z_1$ et la courbe demeure égale à elle-même ; c'est là une propriété capitale de l'hélice : pouvoir se déplacer sans cesser de coïncider avec elle-même.

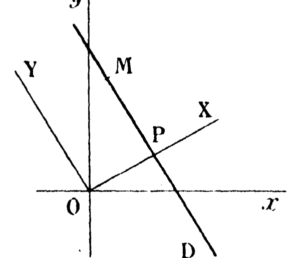
CHAPITRE II

COMPLÉMENTS SUR LA DROITE ET LE PLAN

I. — La droite en géométrie plane.

14. Forme normale de l'équation d'une droite (axes rectangulaires). — Nous avons vu que toute droite est représentée par une équation du premier degré et inversement. Nous allons maintenant considérer quelques aspects particuliers de ce théorème, très importants dans la pratique.

Soit la droite D. Abaissons de O la perpendiculaire OP sur cette droite et fixons sur elle un sens positif arbitraire, soit OX. Posons



$$\overline{OP} = p, \qquad (\widehat{Ox, OX}) = \alpha.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit sur la droite D peut s'écrire

$$\mathbf{OM} . \mathbf{U} = p,$$

U désignant le vecteur unitaire de OX. Or **U** a pour composantes $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; **OM** a pour composantes les coordonnées x et y de M. L'équation de D peut donc s'écrire

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

On dit que cette relation, dans laquelle la somme des carrés

des coefficients de x et de y est l'unité, est l'équation normale de la droite D. On aurait pu également l'obtenir en remarquant que, dans le nouveau système d'axes OX, OY déduit par une rotation de α autour de O des axes Ox, Oy, la droite D a pour équation $X = p$. Il suffit alors de remarquer qu'en vertu des formules (2) du n° 12, on a

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Inversement, étant donnée l'équation

$$Ax + By + C = 0,$$

pour la ramener à la forme normale, on cherche à déterminer des nombres λ, α et p tels que l'on ait

$$A = \lambda \cos \alpha, \qquad B = \lambda \sin \alpha, \qquad C = -\lambda p.$$

On tire de ces équations

$$(2) \quad \lambda = \varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \cos \alpha = \frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \sin \alpha = \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = \frac{-\varepsilon C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ε étant égal à $+1$ ou -1 ; ce facteur ε provient de la possibilité de choisir deux sens opposés sur la perpendiculaire abaissée de O sur D. Si nous changeons le signe de ε, nous changeons l'orientation de cette perpendiculaire, mais comme, en même temps, nous changeons le signe de p, nous retrouvons la droite D, que le premier choix de ε avait fourni.

Remarque. — Les quantités A et B sont proportionnelles à $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$. Elles forment donc un système de paramètres directeurs d'une normale à la droite D. On voit en outre que la *distance de l'origine à la droite* D est mesurée par

$$\frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

15. Distance d'un point à une droite. — Soit le point (x_0, y_0). Par une translation des axes, amenons l'origine en ce

point. D'après les formules de transformation

$$x = x_0 + X, \qquad y = y_0 + Y,$$

la nouvelle équation de la droite est

$$A(x_0 + X) + B(y_0 + Y) + C = 0.$$

Le nouveau terme constant a pour valeur $Ax_0 + By_0 + C$: la distance de la nouvelle origine à la droite s'obtient en divisant $|Ax_0 + By_0 + C|$ par la somme des carrés des coefficients de x et y. La distance cherchée a donc pour mesure le nombre arithmétique

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Sa valeur algébrique. — Revenons à la forme normale (1) de l'équation d'une droite. Lorsqu'un point M (x, y) est sur la droite, la quantité

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$$

est nulle. Si on suppose, plus généralement, que M est un point quelconque du plan, projeté en Q sur X'X, quelle va être la signification géométrique de $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$? Quand on se rapporte aux axes OX, OY, cette expression devient

$$X - p = \overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{PQ}.$$

Ainsi, étant donnée l'équation normale d'une droite, son premier membre a pour valeur absolue la distance du point (x, y) à cette droite. Il a le signe $+$ si ce point est, par rapport à la droite, du côté des X positifs, etc...

Supposons maintenant que D ait pour équation

$$Ax + By + C = 0.$$

Fixons sur la perpendiculaire abaissée de O sur D un sens positif OX. En utilisant les formules (2), dans lesquelles ε aura un signe bien déterminé, nous pouvons mettre $Ax + By + C$ sous la forme

$$(3) \quad Ax + By + C = \lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = \varepsilon\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{PQ}.$$

On convient de dire que $\overline{PQ}$ est la valeur algébrique de la distance du point M à la droite D.

L'égalité (3) *nous montre en outre que la fonction* $Ax + By + C$, *qui s'annule sur la droite* D, *est positive d'un côté de cette droite et négative de l'autre.*

16. Détermination d'une droite. — Pour fixer la position d'une droite, il faut pouvoir écrire son équation ; si l'on recherche celle-ci sous la forme normale, il faut connaître α et p. Si, restreignant un peu la généralité et supposant qu'il s'agit d'une droite non parallèle à Oy, on résout son équation par rapport à y,

$$y = mx + q,$$

la droite sera déterminée si l'on connaît m et q ; la signification géométrique de ces coefficients est évidente : y se réduit à q pour $x = 0$, donc q est l'*ordonnée à l'origine*. D'autre part, en écrivant l'équation de la droite sous la forme

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - q}{m}$$

et en remarquant que x et $y - q$ sont les projections sur les axes d'un vecteur porté par la droite (n° 4), on voit que les nombres 1, m forment un système de paramètres directeurs, donc m est le *coefficient angulaire* (n° 6).

En résumé, *la fixation d'une droite* exige la donnée de deux paramètres ; pour les déterminer, il faudra donc *deux équations de condition*.

Lorsqu'on écrit l'équation de la droite cherchée sous la forme

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

le problème à résoudre consiste à trouver, non pas les valeurs de A, B, C, mais simplement des *quantités proportionnelles* à ces coefficients. Il est clair en effet que si, dans l'équation (4), on substitue à A, B, C les nombres λA, λB, λC, elle continue à représenter la même droite. Dans ce cas, chaque équation de condition imposée à la droite est *homogène* en A, B, C, du fait

qu'elle reste inaltérée par le changement de A, B, C en $\lambda A, \lambda B, \lambda C$[1]. La détermination de la droite se ramène alors à la résolution de deux équations homogènes en A, B, C : elles permettent de calculer les rapports de deux de ces coefficients au troisième.

Examinons les conditions les plus simples qu'on peut imposer à une droite et les problèmes qui en résultent.

Il y a *une infinité de droites qui passent par un point donné*. Effectivement, si on assujettit la droite (4) à passer au point $M_1(x_1, y_1)$ on obtient une seule condition d'égalité

(5) $$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Celle-ci permet de tirer la valeur de C ; en la portant dans (4), ou, ce qui revient au même, en retranchant membre à membre (4) et (5), on obtient *l'équation d'une droite quelconque passant par le point* M_1, sous la forme

(6) $$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Pour achever de déterminer la droite, il faudra lui imposer une autre condition. Celle-ci pourra consister dans le fait de passer par un deuxième point donné ; elle pourra être aussi une condition de direction ; exemple : la droite cherchée est parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS. — Soient $M_1(x_1, y_1)$ et

---

(1) En effet, bornons-nous à étudier le cas où chaque équation de condition est algébrique, c'est-à-dire peut se ramener à la forme

$$f(A, B, C) = 0,$$

où le premier membre est un polynome de degré m en A, B, C. Décomposons ce polynome en groupes homogènes. Notre équation devient

$$\varphi_m(A, B, C) + \varphi_{m-1}(A, B, C) + \ldots + \varphi_1(A, B, C) + \varphi_0 = 0.$$

Quels que soient A, B, C et λ, elle entraîne

$$\lambda^m \varphi_m(A, B, C) + \lambda^{m-1} \varphi_{m-1}(A, B, C) + \ldots\ldots + \lambda \varphi_1(A, B, C) + \varphi_0 = 0.$$

Particularisons A, B, C ; au premier membre, nous avons un polynome en λ qui doit être identiquement nul. Donc on a

$$\varphi_m(A, B, C) = 0, \quad \varphi_{m-1}(A, B, C) = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \varphi_1(A, B, C) = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Si donc la relation $f = 0$ n'est pas homogène, elle résulte de combinaisons par addition de relations homogènes, qui *doivent être séparément vérifiées si elles sont de degrés différents.*

Pratiquement, quand on traduit *une à une* les conditions de l'énoncé, formulées de telle sorte que chacune fournisse *une seule équation, on est* donc *certain que cette équation sera homogène.* Les combinaisons non homogènes sont purement factices.

$M_2(x_2, y_2)$ ces deux points. L'équation de la droite cherchée est de la forme

$$(6) \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

puisqu'elle passe en M_1. Comme elle passe en M_2, on a, entre A et B, la relation homogène

$$(7) \qquad A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0;$$

cette équation fournit des valeurs proportionnelles à A et B. En les portant dans (6) ou, ce qui revient au même, en divisant membre à membre les équations déduites de (6) et (7) par le passage des termes en B à droite du signe =, on obtient l'équation de la droite cherchée sous forme de proportion :

$$(8) \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Cette manière d'écrire suppose qu'aucun dénominateur n'est nul, ou que la droite n'est parallèle à aucun des axes. La forme déduite de (8) en chassant les dénominateurs s'appliquerait d'ailleurs à tous les cas.

En particulier, la droite joignant le point A de l'axe $x'x$ au point B de l'axe $y'y$ a pour équation

$$(9) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

en posant $a = \overline{OA}$ et $b = \overline{OB}$. Nous prions l'élève de traiter cet exemple et de noter que les équations (8) et (9) s'appliqueraient indifféremment en coordonnées obliques [1].

Droite passant par un point donné et ayant une direction donnée. — Soit $M_1(x_1, y_1)$ le point donné ; la condition déterminant la direction de la droite peut être formulée de différentes manières.

1° *En donnant le coefficient angulaire de la droite*, soit m. L'équation de celle-ci est alors

$$(10) \qquad y - y_1 = m(x - x_1).$$

En passant, cela nous montre que le coefficient angulaire de la

[1] Sauf indications explicites, nous continuerons à supposer les axes rectangulaires.

droite qui joint deux points [voyez l'équation (8)] s'obtient en divisant la différence de leurs ordonnées par celle de leurs abscisses

2° *En spécifiant que la droite est parallèle à une droite donnée.* Soit

$$(11) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

l'équation de cette droite. L'équation de la droite cherchée sera

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0.$$

3° *En spécifiant que la droite est perpendiculaire à une droite donnée.* — Celle-ci étant représentée toujours par l'équation (11), la droite cherchée sera, en axes rectangulaires,

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta}.$$

17. Intersection de deux droites. — Soient, en coordonnées rectangulaires ou obliques, les deux droites

$$(D) \qquad Ax + By + C = 0,$$
$$(D') \qquad A'x + B'y + C' = 0.$$

Les coordonnées x, y d'un point commun à ces droites vérifient l'équation de chacune d'elles. On est donc conduit à la résolution de deux équations simultanées. Ces équations admettent une solution et une seule, pourvu que $AB' - BA'$ ne soit pas nul. Dire que $AB' - BA'$ est nul, c'est affirmer le parallélisme des deux droites. Le système devient alors impossible et les droites ne se rencontrent plus, à moins que $AC' - CA'$ ne vienne lui-même à s'annuler ; alors il y a proportionnalité entre les coefficients de nos deux équations : les deux droites données coïncident.

18. Faisceau linéaire de droites. — Si les droites dont nous venons de trouver l'intersection ne sont pas parallèles, l'équation

$$(12) \qquad \alpha(Ax + By + C) + \beta(A'x + B'y + C') = 0$$

représente elle-même une droite passant par leur point commun : les coordonnées de ce dernier, annulant simultanément les pre-

miers membres de (D) et (D′), annulent en effet chacune de leurs combinaisons linéaires, et en particulier le premier membre de (12). Réciproquement, on peut donner à α et β des valeurs telles que l'équation (12) soit susceptible de représenter une droite quelconque issue du point de rencontre (x_0, y_0) de (D) et de (D′). Une telle droite est en effet déterminée si l'on en donne un second point (x_1, y_1) : elle se confond donc avec la droite

$$(A'x_1 + B'y_1 + C')(Ax + By + C) \\ - (Ax_1 + By_1 + C)(A'x + B'y + C') = 0,$$

qui est bien de la forme (12). Il nous a suffi en l'espèce de prendre

$$\alpha = A'x_1 + B'y_1 + C', \qquad \beta = Ax_1 + By_1 + C.$$

Dans le cas où (D) et (D′) sont parallèles, on verra sans peine que l'équation (12) représente une droite parallèle à leur direction commune. Enfin si (D) et (D′) se confondent, la droite représentée par (12) se confond avec chacune d'elles.

Sauf dans ce dernier cas, on dit que l'équation (12) représente un *faisceau linéaire* de droites. Elle ne contient à la vérité qu'un seul paramètre ; si l'on pose $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, elle s'écrit en effet [1]

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + C + \lambda C' = 0.$$

Ses coefficients dépendent linéairement du paramètre λ. Toutes les fois que, dans un problème, les coefficients de l'équation d'une droite seront des fonctions du premier degré d'un paramètre, on sera donc averti que la droite passe par un point fixe ; exceptionnellement, elle pourra conserver une direction fixe. Elle demeurerait fixe si l'on avait oublié de supprimer un binome du premier degré, qui se trouverait en facteur dans les coefficients de la droite.

19. Familles quelconques de droites. — Le faisceau linéaire de droites constitue pour nous l'exemple le plus simple

---

[1] Cette dernière forme est un peu moins générale que (12) : elle représente toutes les droites passant par l'intersection de D et de D′, à l'exception de la droite D′. Lorsqu'une de ces droites tend vers D′, son λ croît indéfiniment en valeur absolue.

d'une famille de droites dépendant d'un paramètre. On aura l'idée générale d'une famille de droites à un paramètre en considérant une courbe et les tangentes à cette courbe. De là le moyen de citer, en restant dans le cadre de la géométrie élémentaire, des familles particulièrement simples de droites, par exemple :

1° Les droites dont la distance à un point fixe O a une valeur donnée d (tangentes à un cercle);

2° Les droites telles qu'un point O fixe se projette sur chacune d'elles en un point situé sur une droite fixe D (tangentes à une parabole ayant O pour foyer, D pour tangente au sommet).

Lorsqu'on part de la circonférence ou de la parabole, on reconnaît aisément que les tangentes à la première de ces courbes forment une famille possédant la propriété 1°, les tangentes à la seconde, une famille possédant la propriété 2°. Mais, à supposer que les indications entre parenthèses soient supprimées, pourrait-on retrouver ces courbes ?

Dans chacun des deux cas cités, on pourrait raisonner géométriquement. Soit A un point du plan, cherchons les droites de la famille qui passent en A, ou (cela revient au même) la projection orthogonale H de O sur chacune d'elles. Le point H se trouvera, d'une part sur le cercle de diamètre OA, d'autre part :

1° sur le cercle de centre O et de rayon d dans le 1er exemple ;

2° sur la droite D dans le second.

Le point H sera donc à l'intersection d'un cercle avec un autre cercle ou avec une droite. Suivant le choix de A, on aura ainsi zéro, une, ou deux solutions. Pour n'en obtenir qu'une (ou mieux : deux confondues), il faudra choisir A de manière que le cercle de diamètre OA soit tangent ou bien au cercle de centre O et de rayon d (dans le premier cas) ou bien à la droite D dans le second. On retrouve ainsi, fort aisément, la circonférence et la parabole constituant les *enveloppes* respectives de nos deux familles de droites. Elles sépareront (dans ces cas simples) la région où doit se trouver le point A pour qu'il y passe deux droites de la famille de celle où il doit se trouver pour qu'il n'en passe aucune.

La recherche de l'enveloppe d'une famille de droites, c'est-à-dire de la courbe tangente à toutes ces droites, est donc ramenée dans chacun de ces deux exemples à la question suivante :

Trouver le lieu des points du plan par lesquels il passe deux droites confondues appartenant à la famille étudiée.

Cette remarque fournit immédiatement l'enveloppe d'une famille de droites

$$(a\lambda^2 + a'\lambda + a'')x + (b\lambda^2 + b'\lambda + b'')y + c\lambda^2 + c'\lambda + c'' = 0,$$

dont l'équation dépend au second degré d'un paramètre λ. Cette équation peut encore s'écrire

$$(ax + by + c)\lambda^2 + (a'x + b'y + c')\lambda + a''x + b''y + c'' = 0.$$

Le lieu des points (x, y) par où il passe deux de ces droites confondues est aussi celui des points pour lesquels cette équation en λ admet une racine double, soit

$$(a'x + b'y + c')^2 - 4(ax + by + c)(a''x + b''y + c'') = 0.$$

19ª. Nous allons faire connaître la méthode analytique générale pour trouver l'enveloppe d'une famille de droites à un paramètre. Nous admettrons l'existence de cette enveloppe, qui, pour fixer les idées, nous aura été garantie d'avance par une personne ou une assemblée digne de foi (¹).

Considérons, en coordonnées rectangulaires ou obliques, l'équation

$$(1) \qquad A(\lambda)x + B(\lambda)y + C(\lambda) = 0,$$

où $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ sont des fonctions du paramètre λ, admettant des dérivées de tous ordres. Soit E l'enveloppe cherchée. Pour chaque valeur de λ, l'équation (1) représente une droite D tangente à la courbe E. Soit $\lambda + \Delta\lambda$ une seconde valeur du paramètre, infiniment voisine de la première : elle fournit une seconde droite D'

$$(1') \qquad A(\lambda + \Delta\lambda)x + B(\lambda + \Delta\lambda)y + C(\lambda + \Delta\lambda) = 0,$$

également tangente à E. Le point d'intersection de ces deux

(¹) Cette importante question sera reprise d'une manière plus systématique dans le développement de ce cours. Toutefois, nous tenons dès maintenant à mettre l'élève en possession de quelques règles, d'une application facile, afin de lui offrir la possibilité de traiter certains exercices.

tangentes a ses coordonnées x, y définies par le système des deux équations simultanées (1) et (1′), ou encore, par le système équivalent formé de (1) et de

$$(1'') \quad \frac{A(\lambda+\Delta\lambda)-A(\lambda)}{\Delta\lambda}x+\frac{B(\lambda+\Delta\lambda)-B(\lambda)}{\Delta\lambda}y + \frac{C(\lambda+\Delta\lambda)-C(\lambda)}{\Delta\lambda}=0.$$

Lorsque $\Delta\lambda$ tend vers zéro, D′ tend vers D, et *le point d'intersection de* D′ *et de* D *tend justement vers le point de contact de* D *avec l'enveloppe*. Ce dernier point sera donc défini par le système

$$(1) \qquad A(\lambda)x+B(\lambda)y+C(\lambda)=0,$$
$$(2) \qquad A'(\lambda)x+B'(\lambda)y+C'(\lambda)=0,$$

dont l'équation (1) est celle de la famille donnée, et l'équation (2) [limite de (1″)] se déduit de (1) en prenant la dérivée de son premier membre par rapport au paramètre λ.

Cela posé, des équations (1) et (2), nous pouvons tirer les valeurs de x et y en fonction de λ : nous aurons ainsi les équations paramétriques de l'enveloppe.

Dans le cas particulier où les fonctions $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ sont des binomes du premier degré en λ, le système (1), (2) sera de la forme

$$(a+a'\lambda)x+(b+b'\lambda)y+c+c'\lambda=0,$$
$$a'x+b'y+c'=0;$$

il équivaut au suivant :

$$ax+by+c=0,$$
$$a'x+b'y+c'=0,$$

qui ne contient plus λ. L'équation (1) représente dans le cas actuel un faisceau linéaire de droites, et nous trouvons que le point obtenu en résolvant le système (1), (2) a ses coordonnées indépendantes de λ : or cela est naturel, puisque justement (le cas du parallélisme étant exclu) nous avons vu que nos droites passent par un point fixe.

19^b. Étudions spécialement le cas où la famille de droites est donnée, en coordonnées rectangulaires, sous la forme normale

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p(\theta)=0,$$

le paramètre étant ici l'angle θ lui-même. L'enveloppe E est

alors définie par le système

$$(1) \qquad x \cos\theta + y \sin\theta = p(\theta),$$
$$(2) \qquad -x \sin\theta + y \cos\theta = p'(\theta),$$

d'où, par résolution, sa représentation paramétrique (¹)

$$(3) \qquad \begin{cases} x = p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta, \\ y = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Attirons l'attention sur une circonstance remarquable. L'équation (2) représente une droite qui passe (et pour cause) par le point de contact ; on peut d'ailleurs la mettre sous la forme

$$(2') \qquad x \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = p'(\theta).$$

Ainsi, tandis que la perpendiculaire à la droite (1) abaissée de l'origine (et convenablement orientée) faisait l'angle θ avec Ox, la perpendiculaire analogue à la droite (2) fait $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec Ox. Les normales à (1) et (2) sont rectangulaires. Donc ces droites le sont elles-mêmes. Ainsi l'équation (2) représente une perpendiculaire à la tangente menée par le point de contact. En définitive :

L'équation (2) est celle de la normale à l'enveloppe.

19ᶜ. On tire de là d'importantes applications : les normales à la courbe E forment une famille de droites à un paramètre, dont on peut se proposer de trouver l'enveloppe. Cette enveloppe sera définie par les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} x \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = p'(\theta), \\ x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi) = p''(\theta), \end{cases}$$

qui s'écrivent également

$$-x \sin\theta + y \cos\theta = p'(\theta),$$
$$-x \cos\theta - y \sin\theta = p''(\theta),$$

(¹) La résolution du système (1), (2) est facilitée par la circonstance suivante : les multiplicateurs à prendre devant les deux équations pour éliminer l'une des inconnues (par exemple y) sont justement les coefficients de l'autre inconnue, qui se trouve finalement en facteur devant l'expression $\cos^2\theta + \sin^2\theta$.

d'où, par résolution, la représentation paramétrique de l'enveloppe des normales

$$(5)\qquad \begin{cases} x = -p'(\theta)\sin\theta - p''(\theta)\cos\theta, \\ y = p'(\theta)\cos\theta - p''(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

On dit que l'enveloppe des normales à une courbe est la *développée* de cette courbe. Nous avons donc ici la représentation, en fonction du paramètre θ, de la développée de E.

Une remarque s'impose maintenant au point de vue de la notation. Tout au début de notre raisonnement, nous sommes partis de l'équation

$$(1)\qquad x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0\,;$$

c'était celle d'une droite quelconque de la famille, x, y nous représentaient alors les coordonnées d'un point indéterminé de cette droite. Dans les formules (3), nous avons conservé les mêmes lettres pour désigner le point de contact avec son enveloppe : cela n'a aucun inconvénient pour qui a noté la double acception de x, y ; si l'on craint la confusion, on pourra employer X, Y dans l'équation (1) pour représenter les coordonnées d'un point courant d'une tangente à E, réservant x, y pour les coordonnées du point de contact M de cette tangente [formules (3)].

Dans la seconde partie de notre calcul, nous avons encore conservé les lettres x, y pour représenter, d'abord les coordonnées d'un point courant de la normale (2′) qui correspond à la tangente (1), et ensuite les coordonnées (5) du point de contact de cette normale avec son enveloppe. Dans la crainte d'une confusion, on pourrait appeler X_1, Y_1 les coordonnées d'un point courant de (2′), réservant x_1, y_1 pour le point de contact K de la normale avec son enveloppe.

Dans le cas où la courbe E est une circonférence, toutes ses normales passent par le centre. Donc le point (x_1, y_1) coïncide avec le centre. Si E n'est pas une circonférence, nous dirons que le point K (x_1, y_1), défini par les formules (5), est le *centre de courbure* associé au point (x, y), donné par les formules (3).

Les composantes du vecteur **MK** sont

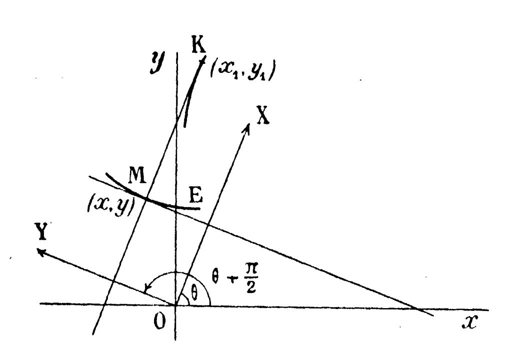
$$x_1 - x = -[p(\theta) + p''(\theta)] \cos \theta,$$
$$y_1 - y = -[p(\theta) + p''(\theta)] \sin \theta,$$

en appelant **U** le vecteur unitaire de la demi-droite OX telle que $(\widehat{Ox, OX}) = \theta$, on a donc

(6) $$\mathbf{MK} = -\mathbf{U}[p(\theta) + p''(\theta)].$$

On voit ainsi que le *rayon de courbure* de la courbe E au point M (c'est-à-dire la distance du point M au centre de courbure) a pour longueur

$$|p(\theta) + p''(\theta)|.$$



L'exposé d'une question est toujours susceptible de prêter matière (sans sortir de la question) à des interrogations accessoires. Ici par exemple, pour m'assurer que j'ai été bien compris, je dirai :

1° *Quelles sont les coordonnées du point* M *dans le système* OX, OY ? (Sans nouveau calcul, et par simple référence à ce que nous avons dit sur l'équation normale de la droite, nous voyons immédiatement que ces coordonnées sont $p(\theta)$, $p'(\theta)$.)

2° *Quelles sont les coordonnées du point* K *dans le système* OX, OY ? (Dans le système formé par le prolongement de OX et par OY, ces coordonnées sont $p''(\theta)$, $p'(\theta)$, d'où les coordonnées demandées :

$$-p''(\theta), \qquad p'(\theta).)$$

3° *Déduire de ces deux réponses la projection de* **MK** *sur* Ox. (On trouve absc. K — absc. M $= -p'' - p$.)

19^d^. Exemple : *développante de cercle.* — Soit à chercher l'enveloppe des droites

(1) $$x \cos \theta + y \sin \theta = a\theta.$$

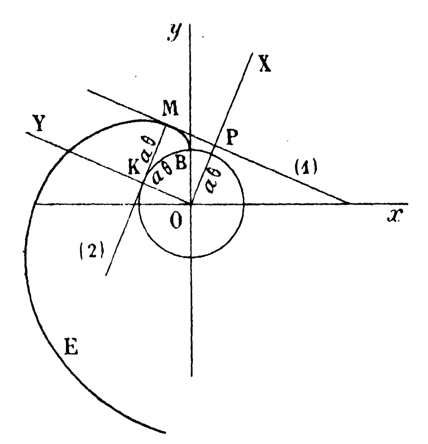
L'équation dérivée par rapport à θ est

$$-x \sin \theta + y \cos \theta = a,$$

ou

(2) $$x \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a.$$

Les équations (1) et (2) déterminent le point M : les droites qu'elles représentent ont été portées sur la figure ci-contre avec les mêmes numéros.



Nous avons

$$(\widehat{Ox, OX}) = (\widehat{Oy, OY}) = \theta.$$

Nous voyons de plus (équation normale de la droite) que la droite (2) est la tangente au cercle de centre O et de rayon a au point où il coupe la demi-droite OY.

Donc l'enveloppe des normales à E est ici ce cercle, et le point d'intersection de OY avec ce cercle est le centre de courbure K à E. Nous avons donc $\overset{\frown}{BK} = a\theta$. D'ailleurs, dans le système d'axes OX, OY, les coordonnées de M sont $(a\theta, a)$. Par suite, le lieu du point M peut être engendré de la manière suivante. Imaginons que la partie KM de la droite (2) soit le brin, libre et tendu, d'un fil inextensible indéfiniment enroulé sur le cercle : on pourrait parachever l'enroulement, toutes les molécules du brin KM venant s'appliquer tour à tour sur l'arc KB et M venant s'appliquer en B (cela en raison de l'égalité entre la longueur KM et la longueur curviligne KB). Donc, pour décrire la totalité du lieu de M, on imaginera que ce fil est complètement enroulé sur le profil de notre disque, que son extrémité est située au point B, et qu'on effectue le déroulement de manière à maintenir tendu le brin déroulé. Dans ces conditions, on donne à la trajectoire de l'extrémité du fil le nom de *développante de cercle*, qui résume bien ce mode de génération.

La *développée* de cette courbe est le cercle lui-même. On comprend sur cet exemple l'origine de l'appellation : *développée* pour désigner l'enveloppe des normales. Nous verrons plus tard que si l'on considère la développée d'une courbe, cette courbe en est toujours une développante (voyez n° 158).

II. — Le plan et la droite (dans l'espace).

20. Forme normale de l'équation d'un plan (coordonnées rectangulaires). — Nous avons vu que tout plan est repré-

senté par une équation du premier degré. Nous allons étudier un cas particulier, qui va nous conduire à la forme normale de l'équation du plan.

Les axes étant supposés rectangulaires, considérons un plan ϖ ; sur la normale OP au plan ϖ issue de O, choisissons un sens positif OX : l'axe ainsi défini aura pour cosinus directeurs l, m, n ; soit p la valeur algébrique du segment OP de cet axe. Menons par le point O deux autres axes OY, OZ formant avec OX un trièdre trirectangle ; si l'on rapporte les coordonnées à ce nouveau trièdre, le plan ϖ aura pour équation

$$X = p\,;$$

donc, dans le premier système, en faisant usage des formules (2) du n° 13, nous voyons qu'il aura pour équation

$$lx + my + nz - p = 0\,; \tag{1}$$

celle-ci est bien de la forme indiquée, avec cette particularité que la somme des carrés des coefficients de x, y, z est égale à l'unité. Une telle équation s'appelle *équation normale* du plan ϖ.

Inversement, soit l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C ne sont pas tous les trois nuls. S'il est possible de déterminer des nombres λ, l, m, n, tels que l'on ait

$$A = \lambda l, \qquad B = \lambda m, \qquad C = \lambda n, \qquad D = -\lambda p,$$

avec

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

l'équation proposée sera équivalente à l'équation (1). On pourra donc déterminer le plan qu'elle représente en calculant l, m, n, p. Or on tire des équations précédentes

$$(2)\quad \begin{cases} l = \dfrac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & m = \dfrac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ n = \dfrac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & p = \dfrac{-\varepsilon D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \lambda = \varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases}$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1. Changer ε revient d'ailleurs à

changer le sens de OX, mais comme on change en même temps le signe de p, on obtient le même point P sur la perpendiculaire issue de O, et par suite le même plan ϖ.

La théorie précédente nous montre que A, B, C *forment un système de paramètres directeurs de la normale au plan.*

Nous voyons aussi que la distance de l'origine au plan ϖ est mesurée par le nombre arithmétique

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Comme dans la question analogue de géométrie plane, on en déduit que *la distance au plan d'un point* (x, y, z) est mesurée par

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. Signe de la fonction $Ax + By + Cz + D$. — Revenons à la forme normale (1) de l'équation d'un plan. Lorsqu'un point $M(x, y, z)$ est dans ce plan, la quantité

$$lx + my + nz - p$$

est nulle. Si, plus généralement, M est un point quelconque de l'espace, projeté en Q sur X'X, il est facile de trouver la signification géométrique de cette expression. Quand on se rapporte aux axes OX, OY, OZ, elle devient

$$X - p = \overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{PQ}.$$

Ainsi, étant donnée l'équation normale d'un plan, son premier membre a pour valeur absolue la distance du point (x, y, z) à ce plan. Il a le signe $+$ si ce point est, par rapport au plan, du côté des X positifs, etc...

Prenons maintenant le cas où l'équation du plan est donnée sous la forme générale

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Fixons sur la perpendiculaire abaissée de O sur le plan un sens positif OX. En utilisant les formules (2), dans lesquelles ε aura

un signe déterminé, nous pourrons mettre $Ax + By + Cz + D$ sous la forme

$$(3) \qquad Ax + By + Cz + D = \lambda(lx + my + nz - p) \\ = \varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \overline{PQ}.$$

On convient de dire que $\overline{PQ}$ est la valeur algébrique de la distance du point M au plan.

La formule (3) *nous montre en outre que la fonction* $Ax + By + Cz + D$, *qui s'annule sur le plan, est positive d'un côté de ce plan et négative de l'autre côté.*

22. Angles de deux plans. — Les angles formés par les deux plans

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

sont égaux aux angles formés par leurs perpendiculaires celles-ci ont pour paramètres directeurs, l'une A, B, C, l'autre A′, B′, C′. On a donc (d'après la formule (3) du n° 5)

$$(4) \qquad \cos V = \frac{\varepsilon(AA' + BB' + CC')}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Perpendicularité. — En particulier, pour que deux plans soient rectangulaires, il faut et il suffit que leurs normales le soient, c'est-à-dire que l'on ait

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Parallélisme. — Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que leurs normales le soient, c'est-à-dire que l'on ait

$$A' = \lambda A, \qquad B' = \lambda B, \qquad C' = \lambda C,$$

relations qu'on peut écrire

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

lorsqu'aucun dénominateur n'est nul.

23. Représentation d'une droite dans l'espace. — Nous avons déjà donné (n° 7) des méthodes permettant d'exprimer

paramétriquement les coordonnées d'un point d'une droite, connaissant, ou bien deux de ses points, ou bien sa direction et un de ses points. Soient par exemple a, b, c un système de paramètres directeurs de la droite et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un de ses points. Pour qu'un point $M(x, y, z)$ soit sur la droite, il faut et il suffit que les composantes du vecteur M_1M sur les trois axes soient proportionnelles à a, b, c. La droite considérée est donc *représentée par les deux équations*

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}. \tag{1}$$

C'est d'ailleurs la valeur commune ρ de ces rapports que nous avons adoptée comme paramètre dans notre second mode de représentation du n° 7.

On voit immédiatement que les équations

$$\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}, \qquad \frac{z-z_1}{c}=\frac{x-x_1}{a}, \qquad \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b},$$

obtenues en associant deux à deux nos rapports égaux, représentent les projections de la droite sur les plans de coordonnées.

Il suffit d'ailleurs en général, pour définir la droite, de connaître ses projections sur deux des plans de coordonnées. Ainsi, une droite non parallèle au plan xOy sera déterminée par ses projections sur les plans xOz et yOz, soient

$$x=az+p, \qquad y=bz+q. \tag{2}$$

Ces équations peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z}{1},$$

et rentrent ainsi dans le type précédent [équations (1)].

Les formes (1) et (2) de représentation d'une droite pourraient donner lieu à des objections : ainsi, s'il s'agit des équations (1), lorsque a est nul, il convient, pour représenter la droite issue de M_1 et de paramètres directeurs 0, b, c, de leur substituer les suivantes :

$$x-x_1=0, \qquad \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

On se tirera d'affaire, dans tous les cas, en définissant la droite comme l'intersection de deux plans, qui pourront d'ailleurs être choisis d'une manière quelconque.

Ainsi, soient les deux plans

$$(\varpi) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$(\varpi') \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

S'ils ne sont pas parallèles, c'est-à-dire si A', B', C' ne sont pas respectivement proportionnels à A, B, C, ils se coupent suivant une droite et une seule : on peut dire que cette droite est définie par les équations de ces plans. (Cela subsiste en axes obliques.)

24. Faisceau linéaire de plans. — Si nous raisonnons comme en géométrie plane (n° 18), nous voyons que l'équation

$$(3) \quad \alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

représente, quels que soient α et β, un plan passant par l'intersection de (ϖ) et (ϖ'). Réciproquement, un plan passant par cette droite peut se représenter, moyennant un choix convenable de α et β, par l'équation précédente : un tel plan est en effet déterminé lorsqu'on en connaît un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, extérieur à l'intersection de (ϖ) et de (ϖ'). Le plan proposé se confond donc avec le suivant :

$$(A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D')(Ax + By + Cz + D) \\ - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(A'x + B'y + C'z + D') = 0.$$

Cette équation est bien de la forme annoncée : il nous a suffi de prendre

$$\alpha = A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D', \qquad -\beta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Si les plans (ϖ) et (ϖ') étaient parallèles, on verrait aisément que l'équation (3) représente tous les plans parallèles à leur direction commune. Enfin si (ϖ) et (ϖ') étaient confondus, le plan (3) se confondrait lui-même avec eux.

Sauf dans ce dernier cas, on dit que l'équation (3) représente un faisceau linéaire de plans : elle ne contient vraiment qu'un

seul paramètre, le rapport $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$. On peut l'écrire

$$(4) \quad (A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + D + \lambda D' = 0. \quad (^1)$$

Dans les applications, le fait de rencontrer un plan dont les coefficients sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ indique qu'il passe par une droite fixe, ou, exceptionnellement, demeure parallèle à un plan fixe. Ce plan demeurerait fixe si tous ses coefficients étaient le produit de constantes par un même binome du premier degré en λ.

25. Réseau linéaire de plans. — Appelons ϖ, ϖ', ϖ'' les plans qui ont pour équations

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0. \end{aligned}$$

L'équation

$$(5) \quad \alpha(Ax + By + Cz + D) + \alpha'(A'x + B'y + C'z + D') + \alpha''(A''x + B''y + C''z + D'') = 0$$

représente, lorsque ϖ, ϖ', ϖ'' forment un trièdre, un plan passant par le sommet de ce trièdre, et si ϖ, ϖ', ϖ'' sont parallèles à une même droite, un plan parallèle à cette droite. Supposons que ϖ, ϖ', ϖ'' se coupent en un point unique : tout plan passant par ce point peut être représenté par une équation de la forme (5). En effet, on peut trouver des valeurs proportionnelles à α, α', α'', de manière que le plan (5) passe par deux points non alignés avec le sommet du trièdre ϖ, ϖ', ϖ''. Ce plan, ayant trois points communs avec le plan considéré, coïncide avec lui, ce qui établit le résultat annoncé. Si ϖ, ϖ', ϖ'' sont parallèles à une même droite sans avoir une droite commune, tout plan parallèle à cette droite est encore susceptible d'être représenté sous la forme (5) (raisonnement analogue). Lorsque ϖ, ϖ', ϖ'' n'ont pas de droite commune, l'équation (5) est donc l'équation générale des plans qui passent par un point donné ou qui sont parallèles à une direction donnée. Un tel système s'appelle *réseau linéaire de plans*.

Lorsque ϖ, ϖ', ϖ'' ont une droite commune ou sont parallèles, on n'a pas un véritable réseau, mais un faisceau.

---

(1) Toutefois l'équation (4) est moins générale que (3) : si on ne donne à λ que des valeurs finies, elle représente tous les plans du faisceau, à l'exception de (ϖ').

26. Problèmes relatifs à la détermination d'un plan. — La fixation d'un plan exige la connaissance de trois paramètres : un plan sera en effet bien déterminé, si nous connaissons, dans son équation normale, la valeur de p et celle des coefficients l, m, n. Or ces derniers sont les coordonnées d'un point de la sphère de centre O, qui a pour rayon l'unité. Nous pourrons donc poser

$$l = \sin\alpha \cos\beta, \qquad m = \sin\alpha \sin\beta, \qquad n = \cos\alpha.$$

Le plan sera connu si l'on donne p et les deux angles α et β.

Pour déterminer un plan, il faut donc *trois équations de condition*.

Si on écrit l'équation du plan inconnu sous la forme

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0,$$

les paramètres qui le déterminent sont les rapports de trois des coefficients A, B, C, D au quatrième : il s'agit alors de trouver des nombres proportionnels à A, B, C, D, et chaque équation de condition est homogène en A, B, C, D [1].

Le fait, pour un plan, de passer par un point donné $M_1(x_1, y_1, z_1)$ se traduit algébriquement par une seule condition. Elle est pour le plan (1),

(2) $$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

En retranchant membre à membre les équations (1) et (2), nous donnons à l'équation de tout plan passant par le point M_1 la forme

(3) $$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

De même, *il suffit d'une égalité pour exprimer qu'un plan est parallèle à une direction* (a, b, c) [2] ; cette condition équivaut en effet à l'orthogonalité de cette direction et de la normale au plan : s'il s'agit du plan (1), elle est donc traduite par l'égalité

(4) $$Aa + Bb + Cc = 0.$$

---

[1] Reprendre, mot pour mot, les raisonnements du n° 16.

[2] Il suffit de même d'une égalité pour exprimer qu'un plan est orthogonal à un autre plan. Dans tout ceci, nous supposons les axes rectangulaires.

Par contre, *il faut deux égalités pour exprimer qu'un plan est perpendiculaire à une droite donnée* (1). Ce sont, en appelant toujours a, b, c les paramètres directeurs de cette droite,

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c},$$

égalités qu'on remplacerait par

$$A = \lambda a, \qquad B = \lambda b, \qquad C = \lambda c,$$

si l'on redoutait de voir l'un des dénominateurs s'annuler.

Écrire qu'un plan contient une droite donnée conduira à deux relations entre ses coefficients ; on les obtient en exprimant que le plan contient :

ou bien deux points de la droite ;

ou bien un de ses points et sa direction.

Par exemple, pour que le plan (1) contienne la droite

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Aa + Bb + Cc &= 0. \end{aligned}$$

Ces indications nous mettent en mesure de résoudre les problèmes les plus usuels relatifs à la détermination d'un plan.

Un plan sera défini si l'on en donne *trois points,* à condition, bien entendu, que ces points ne soient pas en ligne droite. Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et $M_3(x_3, y_3, z_3)$ ces points. L'équation de ce plan sera

$$(3) \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

pourvu qu'on donne à A, B, C des valeurs satisfaisant aux deux équations

$$\begin{aligned} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) &= 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) &= 0. \end{aligned}$$

---

(1) Il faut deux égalités pour exprimer qu'un plan est parallèle à un autre plan.

On en tire des valeurs proportionnelles à A, B, C qui, portées dans (3), conduisent à l'équation du plan cherché.

Nous avons déjà résolu, au n° 24, le problème qui consiste à trouver le plan passant par une *droite* donnée et par *un point* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *extérieur à cette droite.*

Par une méthode analogue, nous obtenons le *plan passant par une droite donnée et parallèle à une direction donnée.* Supposons toujours la droite définie par l'intersection des deux plans

$$(\varpi) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$(\varpi') \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et soit la direction (a, b, c) non parallèle à cette droite : l'un au moins de nos deux plans, (ϖ') *par exemple, n'est pas parallèle à la direction* (a, b, c). Le plan cherché passe par l'intersection de (ϖ) et de (ϖ'), et il est distinct de (ϖ'). On peut donc l'écrire

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + D + \lambda D' = 0.$$

On détermine la valeur de λ en exprimant que ce plan est parallèle à la direction (a, b, c). On obtient finalement l'équation cherchée sous la forme :

$$(A'a + B'b + C'c)(Ax + By + Cz + D) \\ - (Aa + Bb + Cc)(A'x + B'y + C'z + D') = 0.$$

Ce résultat est d'ailleurs indépendant de la restriction apparente [1] intervenue au cours du raisonnement ; l'élève le montrera, et, à titre d'exercice, reprendra le raisonnement en recherchant l'équation du plan sous la forme

$$\alpha(Ax + \ldots) + \beta(A'x + \ldots) = 0,$$

qui ne donne lieu à aucune objection de ce genre.

Si nous imposons à un plan d'être parallèle simultanément à deux directions (a, b, c) et (a', b', c'), les paramètres directeurs A, B, C de la normale au plan satisferont aux conditions

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = 0,$$

[1] A savoir que le plan cherché est distinct de (ϖ').

d'où l'on tire (¹)

$$\frac{A}{bc' - cb'} = \frac{B}{ca' - ac'} = \frac{C}{ab' - ba'}.$$

Le plan sera alors déterminé si nous en fixons un point (x_1, y_1, z_1). Il aura pour équation

$$(bc' - cb')(x - x_1) + (ca' - ac')(y - y_1) + (ab' - ba')(z - z_1) = 0.$$

Notons enfin, en vue des applications, que l'équation du plan mené par un point (x_1, y_1, z_1) perpendiculairement à une direction (a, b, c) est

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

27. Intersection d'une droite et d'un plan. — Soient la droite, intersection des plans

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0,$$
(2) $$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et le plan

(3) $$A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

Si la droite n'est pas parallèle au plan, c'est-à-dire si la quantité

$$A''(BC' - CB') + B''(CA' - AC') + C''(AB' - BA')$$

n'est pas nulle, la droite coupe le plan en un point et un seul. Sinon, les plans parallèles aux plans (1), (2), (3), menés par l'origine, appartiennent alors à un même faisceau linéaire et l'on a

(4) $$\begin{cases} A'' = \alpha A + \beta A', \\ B'' = \alpha B + \beta B', \\ C'' = \alpha C + \beta C'. \end{cases}$$

En général, D'' ne sera pas égal à $\alpha D + \beta D'$; c'est le cas du parallélisme. Si l'on a, en même temps que les égalités (4), la suivante :

$$D'' = \alpha D + \beta D',$$

la droite considérée est tout entière contenue dans le plan (3).

Remarques. I. — Nous laissons à l'élève le soin de discuter l'intersection des trois plans (1), (2), (3) : cette question ne diffère pas essentiellement de la précédente.

(¹) Cf. l'application II du nº 30 *bis*.

II. — Si la droite donnée est

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

pour chercher son point de rencontre avec le plan (3), il est commode de prendre pour inconnue auxiliaire la valeur commune ρ des rapports $\frac{x - x_1}{a}$, ... etc. Faire le calcul et retrouver ainsi la condition du parallélisme.

28. Problèmes relatifs à la détermination d'une droite. — Au n° 7, nous avons déjà résolu des problèmes de cette espèce. Par exemple, nous avons appris à représenter paramétriquement la *droite qui passe par deux points donnés* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Pour qu'un point $M(x, y, z)$ soit sur cette droite, il faut et il suffit que les projections sur les trois axes des vecteurs M_1M et M_1M_2 soient proportionnelles : nous obtenons ainsi les équations de la droite M_1M_2 sous la forme

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Avant d'aborder tout autre problème, cherchons le nombre de conditions d'égalité que nécessite la détermination d'une droite. Soit une droite quelconque D rapportée aux axes Ox, Oy, Oz. Compliquons la figure en choisissant sur D deux points M_1 et M_2 : le nombre des paramètres indépendants mis en jeu dans sa détermination est ainsi *augmenté de deux unités*. Or pour fixer les points M_1 et M_2, il faut connaître les coordonnées de chacun d'eux, ce qui fait *six paramètres*. Donc la droite D elle-même dépend de *quatre paramètres*.

On retrouve d'ailleurs ce résultat en remarquant qu'on peut, en général, représenter une droite par des équations de la forme

$$(1) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

Les quatre paramètres sont alors a, b, p, q. Ce mode de représentation suppose seulement que la droite n'est pas parallèle au plan xOy. Comme il y a au moins un des plans de coordonnées qui n'est pas parallèle à la droite, on pourra toujours utiliser ce mode de définition, à un échange près de x, y, z.

En résumé, *la détermination d'une droite exige la connaissance de quatre paramètres* : tout problème de géométrie dont l'inconnue est une droite devra, pour admettre un nombre fini de solutions, être formulé de manière que son énoncé conduise à quatre équations de conditions.

Imposer à une droite de *passer par un point donné,* c'est l'assujettir à *deux conditions* ; supposons en effet qu'il s'agisse de la droite (1). Pour qu'elle passe par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$x_1 = az_1 + p, \qquad y_1 = bz_1 + q.$$

Une seule égalité suffit par contre *pour exprimer qu'une droite est dans un même plan avec une droite donnée.* Pour que les deux droites

$$(D) \quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \qquad (D') \quad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q' \end{cases}$$

soient dans un même plan, il faut en effet et il suffit que le plan

$$(q' - q)(x - az - p) - (p' - p)(y - bz - q) = 0,$$

déterminé par (D) et la trace de (D') sur xOy, contienne la direction a', b', 1, de D', c'est-à-dire que l'on ait

$$(q' - q)(a' - a) - (p' - p)(b' - b) = 0.$$

Si $a' - a$ et $b' - b$ sont simultanément nuls, les droites (D) et (D') seront alors parallèles ; sinon, elles seront sécantes.

Ainsi que nous l'avons indiqué à propos de la détermination d'un plan, imposer à une droite d'*être parallèle à un plan donné* (ou, ce qui revient au même, orthogonale à une direction donnée) *équivaut à une condition* ; *être parallèle à une droite donnée* (ou bien perpendiculaire à un plan donné) *équivaut* par contre *à deux conditions.*

Ces indications nous permettent, étant donné un problème relatif à la recherche d'une droite, de vérifier si son énoncé contient bien les quatre conditions requises. Pratiquement, on s'attache d'ailleurs rarement à déterminer la droite au moyen des nombres a, b, p, q mis en jeu dans les équations (1) ; cela

alourdirait inutilement la discussion, car, adoptant cette forme de représentation, on renonce d'emblée aux solutions fournies par les droites parallèles à xOy : on se trouverait alors dans l'obligation de diviser la rédaction en deux parties :

1° recherche des droites non parallèles à xOy ;

2° recherche des droites parallèles à xOy [1].

On se contente donc de donner les équations de deux plans passant par la droite cherchée. Nous allons préciser cette idée au moyen de quelques exemples.

1° *Droite passant par un point donné et s'appuyant sur deux droites données.* — Soit à trouver une droite issue d'un point M_1 et s'appuyant sur deux droites D et D'. La droite cherchée est contenue dans le plan ϖ déterminé par la droite D et le point M_1 ; elle est aussi dans le plan ϖ' de la droite D' et du point M_1. L'intersection des plans ϖ et ϖ' est la droite cherchée, pourvu qu'elle ne soit parallèle ni à la droite D, ni à la droite D', c'est-à-dire pourvu que M_1 ne soit dans aucun des plans menés par une de nos droites parallèlement à l'autre.

Nous savons d'ailleurs écrire les équations de ϖ et ϖ' (voir n° 24).

2° *Droite de direction donnée s'appuyant sur deux droites données* D *et* D'. — On la détermine par l'intersection des plans menés par chaque droite parallèlement à la direction donnée (n° 26, page 69).

3° *Perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite donnée.* — Soit la droite D et le point $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Menons de M_1 le plan perpendiculaire à D. Il coupe D en un point M_2. Ayant calculé les coordonnées de M_2, nous sommes ramenés [2] à trouver la droite joignant les points M_1 et M_2.

La distance M_1M_2 est celle du point M_1 à la droite D.

4° *Perpendiculaire commune à deux droites.* — Lorsque nous imposons à une droite de couper à angle droit deux droites données, nous soumettons bien cette droite à quatre conditions. Soient a, b, c et a', b', c' les paramètres directeurs des deux droites données (non parallèles). Les paramètres directeurs u, v, w de la perpendiculaire commune satisfont aux deux équations

$$au + bv + cw = 0,$$
$$a'u + b'v + c'w = 0.$$

---

[1] Une telle droite serait définie par sa cote et sa projection sur xOy :

$$z = h, \qquad Ax + By + C = 0.$$

[2] On pourrait aussi définir la droite cherchée comme intersection du plan perpendiculaire à D mené par M_1 et du plan déterminé par D et M_1.

On peut donc prendre

$$u = bc' - cb', \qquad v = ca' - ac', \qquad w = ab' - ba' ;$$

on est alors ramené à trouver une droite de direction connue et rencontrant deux droites données.

La longueur de la perpendiculaire commune constitue, comme on sait, le minimum de la distance d'un point d'une droite à un point de l'autre. On calcule cette *plus courte distance* en évaluant la distance d'un point de la première droite au plan parallèle à celle-ci mené par l'autre, ou inversement.

Exemple (1). — Soient les deux droites

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

et

$$x = 0, \qquad y = mz + p.$$

La première a pour paramètres directeurs a, b, c et la seconde $0, m, 1$. La direction de leur perpendiculaire commune a donc pour paramètres

$$b - cm, \qquad -a, \qquad am.$$

Elle est l'intersection des deux plans

$$a(c + mb)x + [bc - m(c^2 + a^2)]y + [bcm - (a^2 + b^2)]z = 0,$$
$$a(1 + m^2)x + (mz + p - y)(cm - b) = 0.$$

La plus courte distance des deux droites est la distance de l'origine au plan mené par la seconde droite parallèlement à la direction (a, b, c) ; il a pour équation

$$(b - mc)x - ay + amz + ap = 0.$$

La plus courte distance cherchée est donc

$$\frac{|ap|}{\sqrt{(b - mc)^2 + a^2(1 + m^2)}}.$$

29. Orientation d'un trièdre (2). — Supposons qu'il s'agisse du trièdre $OM_1M_2M_3$ obtenu en joignant l'origine aux points

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2), \qquad M_3(x_3, y_3, z_3),$$

dans l'ordre indiqué. L'expression

$$\omega_{M_1M_2M_3} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)$$

---

(1) L'élève s'exercera à traiter de nombreux cas particuliers des problèmes précédents.

(2) Dans une première lecture on peut omettre ce numéro : le résultat essentiel en est retrouvé par une autre voie au n° 31.

s'annule quand le point M_1 est dans le plan OM_2M_3 et change de signe quand la droite OM_1 traverse ce plan.

Substituons à M_1 un autre point $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ et formons $\omega_{M'_1M_2M_3}$; les deux trièdres $OM_1M_2M_3$ et $OM'_1M_2M_3$ seront de même sens ou de sens contraires selon que $\omega_{M_1M_2M_3}$ et $\omega_{M'_1M_2M_3}$ sont de même signe ou de signes contraires ; en effet, pour que deux trièdres ayant en commun deux arêtes OM_2 et OM_3 soient de même sens, il faut et il suffit qu'ils soient situés d'un même côté du plan de la face commune OM_2M_3. Substituons maintenant au point M_2 un point M'_2 et remarquons que $\omega_{M'_1M_2M_3}$ peut s'écrire

$$x_2(y_3z'_1 - z_3y'_1) + y_2(z_3x'_1 - x_3z'_1) + z_2(x_3y'_1 - y_3x'_1).$$

Nous verrons, par un raisonnement analogue, que les deux trièdres $OM'_1M_2M_3$ et $OM'_1M'_2M_3$ sont de même sens ou de sens contraires suivant que les quantités $\omega_{M'_1M_2M_3}$ et $\omega_{M'_1M'_2M_3}$ sont de même signe ou de signes contraires; enfin, en substituant de même au point M_3 un point M'_3, et en raisonnant après avoir ordonné $\omega_{M'_1M'_2M_3}$ par rapport aux lettres affectées de l'indice 3, nous verrons que les deux trièdres $OM'_1M'_2M_3$ et $OM'_1M'_2M'_3$ sont de même sens ou de sens contraires suivant que $\omega_{M'_1M'_2M_3}$ et $\omega_{M'_1M'_2M'_3}$ sont de même signe ou de signes contraires.

De tout ceci résulte immédiatement l'énoncé suivant :

Pour que les deux trièdres $OM_1M_2M_3$ et $OM'_1M'_2M'_3$ soient de même sens, il faut et il suffit que les quantités $\omega_{M_1M_2M_3}$ et $\omega_{M'_1M'_2M'_3}$ soient de même signe.

Choisissons alors pour M'_1, M'_2, M'_3 les points situés à l'unité de distance de O sur les portions positives Ox, Oy, Oz des axes. La quantité $\omega_{M'_1M'_2M'_3}$ prend la valeur $+1$.

Donc, *pour que le trièdre* $OM_1M_2M_3$ *soit*, comme celui des axes, *de sens direct, il faut et il suffit que la quantité* $\omega_{M_1M_2M_3}$ *soit positive.*

30. Produit vectoriel. — On appelle produit vectoriel de deux vecteurs libres $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, et on représente par la notation $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$, un vecteur $\mathbf{W}$ orthogonal à $\mathbf{V}$ et à $\mathbf{V}'$, tel qu'un trièdre, dont les arêtes sont parallèles à $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{W}$ et de même sens, soit lui-même de même sens qu'un trièdre fondamental $Oxyz$, et tel enfin que l'on ait

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{V}||\mathbf{V}'| \sin(\widehat{\mathbf{V}, \mathbf{V}'}),$$

en convenant de désigner par $|\mathbf{V}|$, $|\mathbf{V}'|$, $|\mathbf{W}|$ les longueurs respectives de $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{W}$ et par $(\widehat{\mathbf{V}, \mathbf{V}'})$ l'angle compris entre 0 et π formé par les directions de $\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$. A cause de la convention relative au sens du trièdre $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{W}$, le produit vectoriel n'est pas commutatif,

nais alterné, c'est-à-dire qu'on a les égalités géométriques

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = -\mathbf{V}' \wedge \mathbf{V}.$$

$\mathbf{W}$ s'annule lorsque $\mathbf{V}' = m\mathbf{V}$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ sont colinéaires.

THÉORÈME. — *Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition géométrique. Autrement dit, on a l'égalité géométrique*

$$\mathbf{V} \wedge (\mathbf{V}' + \mathbf{V}'') = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' + \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}''.$$

Pour le démontrer, nous établirons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Le produit vectoriel de* $\mathbf{V}$ *et de* $\mathbf{V}'$ *est égal à celui de* $\mathbf{V}$ *et de* $\mathbf{v}'$, *projection orthogonale de* $\mathbf{V}'$ *sur un plan perpendiculaire à* $\mathbf{V}$.

En effet, si nous confondons par commodité les origines purement arbitraires de $\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$, la coïncidence des plans $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}$, $\mathbf{v}'$ entraîne pour les deux produits vectoriels considérés la communauté de direction. D'ailleurs les angles $(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ et $(\mathbf{V}, \mathbf{v}')$ ont même orientation. Donc les vecteurs $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$ et $\mathbf{V} \wedge \mathbf{v}'$ ont même sens. Quant à l'égalité de grandeur, elle résulte de l'équivalence des parallélogrammes construits sur $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ d'une part, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{v}'$ d'autre part.

Ce lemme étant établi, projetons $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$, $\mathbf{V}' + \mathbf{V}''$ sur un plan perpendiculaire à $\mathbf{V}$. Nous obtenons respectivement les vecteurs $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}''$, $\mathbf{v}' + \mathbf{v}''$. D'après le lemme, il suffit de prouver l'égalité

$$\mathbf{V} \wedge (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') = \mathbf{V} \wedge \mathbf{v}' + \mathbf{V} \wedge \mathbf{v}''.$$

Or celle-ci est évidente si l'on prend pour unité de longueur la longueur de $\mathbf{V}$ et si l'on remarque que l'opération $\mathbf{V} \wedge \mathbf{v}$ équivaut à une rotation d'un angle droit de $\mathbf{v}$, dans un sens bien déterminé, autour de $\mathbf{V}$ (pourvu que $\mathbf{v}$ soit perpendiculaire à $\mathbf{V}$).

30 *bis*. Composantes du produit vectoriel en coordonnées rectangulaires. — Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz formant un trièdre $Oxyz$ dont le sens nous servira à fixer le sens du produit vectoriel de deux vecteurs, ainsi qu'il a été dit plus haut. Soient $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ ces deux vecteurs tels que

$$\mathbf{V} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + C\mathbf{z}, \qquad \mathbf{V}' = A'\mathbf{x} + B'\mathbf{y} + C'\mathbf{z}.$$

La distributivité va nous permettre d'obtenir aisément $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$ Dans les seconds membres, l'accouplement des termes de même rang, qui sont des vecteurs colinéaires, donne zéro, et on a simplement

$$\mathbf{W} = BC'(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) + CA'(\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) + AB'(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \\ + CB'(\mathbf{z} \wedge \mathbf{y}) + AC'(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z}) + BA'(\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}).$$

En tenant compte de la propriété d'alternance du produit vectoriel de deux vecteurs, et des relations évidentes

$$y \wedge z = x, \qquad z \wedge x = y, \qquad x \wedge y = z,$$

nous avons finalement

$$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = (BC' - CB')x + (CA' - AC')y + (AB' - BA')z.$$

Application I. — Identité de Lagrange. — Soient deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, de composantes X, Y, Z et X', Y', Z'. Soit $\mathbf{W} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$.

Nous savons que les composantes de $\mathbf{W}$ sont

$$YZ' - ZY', \qquad ZX' - XZ', \qquad XY' - YX'.$$

Formons

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}') \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}').$$

Le premier membre représente le carré de la longueur du vecteur $\mathbf{W}$, soit

$$(YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2$$

et le second membre représente le carré de la longueur du vecteur $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$, c'est-à-dire $\mathbf{V}^2 \times \mathbf{V}'^2 \times \sin^2 \theta$, en appelant θ l'angle des deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, ou encore

$$V^2V'^2 - V^2V'^2 \cos^2 \theta = V^2V'^2 - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}')^2$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - (XX' + YY' + ZZ')^2.$$

Ainsi se trouve établie l'identité

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - (XX' + YY' + ZZ')^2$$
$$\equiv (YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2,$$

dite identité de Lagrange.

Application II. — *Soit la droite définie comme intersection des deux plans*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Trouver un système de paramètres directeurs de cette droite.

Soit u, v, w un tel système. Le vecteur (u, v, w) est orthogonal à chacun des vecteurs (A, B, C) et (A', B', C'), puisque ces vecteurs sont respectivement normaux aux deux plans donnés. Donc

$$(1) \qquad Au + Bv + Cw = 0, \qquad A'u + B'v + C'w = 0.$$

Le vecteur (u, v, w) est colinéaire au produit vectoriel de (A, B, C) et (A', B', C'). On a ainsi la solution générale des équations (1) sous la forme

$$\frac{u}{BC' - CB'} = \frac{v}{CA' - AC'} = \frac{w}{AB' - BA'}.$$

31. Calcul du volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs OA, OB, OC. — La valeur arithmétique de ce volume est égale au produit de la base par la hauteur. Or l'aire de la base est égale à la grandeur du produit vectoriel **OB** $\wedge$ **OC**. La hauteur est la projection de **OA** sur la perpendiculaire au plan OBC, c'est-à-dire sur la direction du produit vectoriel précédent : soit θ l'angle que fait ce produit vectoriel avec **OA**.

Le volume cherché est donc, en valeur absolue, le produit ordinaire, arithmétique,

$$|\mathbf{OA}| \times |\mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC}| \times |\cos\theta|, \qquad \text{ou encore} \qquad |\mathbf{OA} \,.\, (\mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC})|.$$

Soient a, a', a'' les composantes de **OA** ;
b, b', b'' — **OB** ;
c, c', c'' — **OC**.

Le volume cherché est donc, en valeur absolue,

$$|a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb')|.$$

Supprimons maintenant le symbole valeur absolue, c'est-à-dire considérons l'expression **OA** . (**OB** $\wedge$ **OC**) prise *en grandeur et en signe. Par définition, elle sera la valeur algébrique du volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs* **OA**, **OB**, **OC**, *considérés dans l'ordre indiqué* ; nous posons donc

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}) = \mathbf{OA} \,.\, (\mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC}) \text{ [1]}.$$

Cette expression change de signe :

1° quand on permute **OB** et **OC** ;

2° quand **OA** traverse le plan de la face OBC, ou, plus brièvement, quand le trièdre (**OA**, **OB**, **OC**) change de sens.

Pour qu'elle soit positive, il faut et il suffit que l'angle de **OA** et de **OB** $\wedge$ **OC** soit aigu (définition du produit scalaire), ou encore que **OA** soit du même côté que **OB** $\wedge$ **OC** par rapport au plan OBC, ou encore que les trièdres (**OB**, **OC**, **OA**) et

$$(\mathbf{OB}, \mathbf{OC}, \mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC})$$

soient de même sens. Le second étant direct par définition, le premier doit l'être également. Or son sens est aussi celui du trièdre (**OA**, **OB**, **OC**), qui s'en déduit par permutation circulaire [2]. Finalement, nous pourrons énoncer les résultats suivants :

---

[1] Cette expression s'écrirait ω_{ABC} dans la notation du n° 29.

[2] Dans le cas d'un trièdre trirectangle, une permutation circulaire des arêtes est une conséquence d'une rotation de $\frac{4 \text{ droits}}{3} = 120$ degrés autour de la bissectrice du trièdre, c'est-à-dire de la droite dont les équations (rapportées aux arêtes de ce trièdre prises pour axes) sont $x = y = z$.

1° Le signe du volume du parallélépipède construit sur **OA**, **OB**, **OC** (ordre fixé) est + si le trièdre **OA**, **OB**, **OC** est direct, et — dans le cas contraire. Il change par la permutation de deux arêtes (1).

2° Représentons par (**OA**, **OB**, **OC**) ce volume algébrique ; on a

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}) = \mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC}) = \mathbf{OB} \cdot (\mathbf{OC} \wedge \mathbf{OA})$$
$$= \mathbf{OC} \cdot (\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB})$$
$$= -\mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OC} \wedge \mathbf{OB}) = -\mathbf{OB} \cdot (\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OC})$$
$$= -\mathbf{OC} \cdot (\mathbf{OB} \wedge \mathbf{OA}).$$

32. Détermination d'un vecteur glissant. — Lorsqu'en statique on étudie la réduction des forces appliquées à un corps solide, on est conduit à regarder comme équivalentes deux forces représentées par des vecteurs équipollents et de même ligne d'action ; il est donc utile d'apprendre à déterminer un vecteur, *à un glissement près le long de sa ligne d'action* (d'où le nom de vecteur glissant). Cette étude va d'ailleurs nous conduire à un nouveau mode de détermination d'une droite, précieux pour les recherches théoriques à cause de sa grande généralité et de la symétrie des notations qu'il met en jeu.

Supposons toujours les coordonnées rectangulaires et partons d'une droite D, issue d'un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et de paramètres directeurs a, b, c. Ses projections sur les plans de coordonnées ont pour équations

$$(1) \qquad \begin{cases} cy - bz = cy_1 - bz_1, \\ az - cx = az_1 - cx_1, \\ bx - ay = bx_1 - ay_1. \end{cases}$$

Considérons le vecteur M_1P d'origine M_1, dont les projections sur les axes sont a, b; c. Sa ligne d'action est D. Construisons d'autre part le vecteur OG, d'origine O, dont les trois composantes sont

$$l = cy_1 - bz_1, \qquad m = az_1 - cx_1, \qquad n = bx_1 - ay_1.$$

D'après ce que nous avons vu au n° 30, on a précisément

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{M}_1\mathbf{P}.$$

Le vecteur OG s'appelle le MOMENT par rapport au point O du vecteur M_1P. Les équations (1) expriment que tout vecteur déduit de M_1P par glissement le long de D a même moment par rapport à O que le vecteur M_1P lui-même. L'élève pourra d'ailleurs s'exercer à vérifier qu'un tel glissement n'altère ni la direction, ni la grandeur, ni le

(1) En géométrie plane, on pourrait définir de même l'aire algébrique du parallélogramme construit sur deux vecteurs.

sens de OG, en faisant appel aux considérations géométriques qui précèdent.

Supposons donnés les nombres a, b, c et l, m, n, et essayons d'en déduire le vecteur M_1P, à un glissement près. La détermination d'un vecteur glissant fait intervenir un paramètre de plus que celle de sa ligne d'action ; elle exige donc la donnée de cinq paramètres. Donc les six nombres a, b, c et l, m, n, lorsque le problème est possible, ne sont pas indépendants. Effectivement, puisque OG est orthogonal à M_1P, nous devons avoir

$$la + mb + nc = 0. \tag{2}$$

Cette condition est nécessaire. Inversement, si elle est remplie, les trois équations

$$\begin{aligned} cy - bz &= l, \\ az - cx &= m, \\ bx - ay &= n \end{aligned}$$

représentent trois plans qui appartiennent à un même faisceau linéaire ; l'origine (x, y, z) du vecteur cherché est alors arbitraire sur la droite commune à ces plans.

En définitive, le vecteur glissant dont il s'agit est donc défini par les six nombres a, b, c, l, m, n, liés par la relation (2).

Géométriquement, on peut dire qu'étant donnés deux vecteurs rectangulaires OQ et OG, le vecteur équipollent à OQ, dont le moment par rapport à O est OG, est connu à un glissement près.

Bien souvent, pour déterminer une droite, on place sur cette droite un vecteur glissant, et on donne les six coordonnées a, b, c, l, m, n de ce vecteur, liées par la relation (2). Si au vecteur a, b, c porté par D on substitue le vecteur λa, λb, λc, les composantes de son moment deviennent λl, λm, λn. Il en résulte que toute propriété géométrique de D qui se traduit par une seule égalité de condition, fournira une relation homogène entre a, b, c, l, m, n.

Remarque. — Soit un vecteur dont l'origine a pour coordonnées x, y, z et dont les projections sont a, b, c. Une translation d'axes montre immédiatement que son moment par rapport au point (x_1, y_1, z_1) a pour projections sur les axes

$$\begin{aligned} &c(y - y_1) - b(z - z_1), \\ &a(z - z_1) - c(x - x_1), \\ &b(x - x_1) - a(y - y_1). \end{aligned}$$

Distance d'un point a une droite. — La droite D dont les trois pro-

jections sont

$$c(y - y_1) - b(z - z_1) = 0,$$
$$a(z - z_1) - c(x - x_1) = 0,$$
$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$$

peut être regardée comme le lieu de l'origine d'un vecteur équipollent à OQ et ayant un moment nul par rapport au point M_1. Supposons plus généralement que x, y, z désignent les coordonnées d'un point M, en dehors de la droite, à une distance d de celle-ci. Le moment par rapport à M_1 du vecteur d'origine M et de composantes a, b, c a pour carré, d'une part,

$$d^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

et, d'autre part,

$$[c(y - y_1) - b(z - z_1)]^2 + [a(z - z_1) - c(x - x_1)]^2 + [b(x - x_1) - a(y - y_1)]^2.$$

On a donc, en se servant des notations l, m, n précédemment introduites,

$$d^2 = \frac{(cy - bz - l)^2 + (az - cx - m)^2 + (bx - ay - n)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

32 *bis*. Moment axial d'un vecteur glissant. — En chaque point M d'un axe, prenons le moment d'un vecteur donné AB : tous les moments ainsi obtenus ont même projection sur l'axe. Car, en appelant M_1 un point fixe de l'axe, on a

$$\mathbf{MA} \wedge \mathbf{AB} = (\mathbf{MM_1} + \mathbf{M_1A}) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{MM_1} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{M_1A} \wedge \mathbf{AB}.$$

Donc $\mathbf{MA} \wedge \mathbf{AB}$ est la somme géométrique de $\mathbf{M_1A} \wedge \mathbf{AB}$ et d'un vecteur orthogonal à l'axe, d'où résulte le théorème.

Soient a, b, c les composantes de AB, l, m, n celles de son moment par rapport à l'origine. Soient α, β, γ les composantes du vecteur unitaire de l'axe (autrement dit ses cosinus directeurs), λ, μ, ν celles du moment de ce vecteur par rapport à l'origine. Nous avons, en appelant x, y, z les coordonnées du point A,

$$l = cy - bz, \qquad m = az - cx, \qquad n = bx - ay,$$
$$\lambda = \gamma y_1 - \beta z_1, \qquad \mu = \alpha z_1 - \gamma x_1, \qquad \nu = \beta x_1 - \alpha y_1.$$

La valeur du moment axial sera

$$\alpha[c(y - y_1) - b(z - z_1)] + \beta[a(z - z_1) - c(x - x_1)] + \gamma[b(x - x_1) - a(y - y_1)],$$

ou encore

$$\alpha l + \beta m + \gamma n + a\lambda + b\mu + c\nu.$$

Pour que le moment d'un vecteur (non nul) *par rapport à un axe soit nul,* il faut et il suffit que *le vecteur et l'axe soient dans un même plan.*

La condition est nécessaire. Soient le vecteur AB et l'axe X'X ; si le moment de AB par rapport à cet axe est nul, c'est que son moment OG par rapport à un point O de X'X est orthogonal à X'X [1]. Donc X'X et AB sont dans le plan perpendiculaire en O à OG.

La condition est suffisante, car si X'X et AB sont dans un plan P, le moment de AB par rapport à un point O de X'X est orthogonal à P, donc aussi à AB.

Comme application de cette proposition et de la formule qui nous a permis d'évaluer le moment d'un vecteur par rapport à un axe, nous proposons à l'élève de montrer que la condition pour que deux droites soient dans un même plan peut s'écrire

$$la' + mb' + nc' + l'a + m'b + n'c = 0,$$

en appelant a, b, c, l, m, n et a', b', c', l', m', n' les coordonnées de deux vecteurs glissants, portés l'un par la première droite et l'autre par la seconde.

33. Remarques sur l'emploi des axes obliques. — Dans le chapitre I, nous avons développé des méthodes dont le principe s'applique indifféremment en axes rectangulaires ou en axes obliques. Cependant, pour la simplicité des calculs, il y a lieu de donner la préférence aux axes rectangulaires dans tous les problèmes où interviennent des éléments métriques, c'est-à-dire où l'on doit évaluer des angles ou des distances.

Par contre, dans les problèmes où n'interviennent que des relations du genre suivant :

propriété pour des points d'appartenir à une même droite ou à un même plan,

propriétés de parallélisme,

relations entre des rapports algébriques de segments parallèles,

l'usage d'axes obliques n'introduira aucune complication d'écriture.

Ainsi, quels que soient les axes, les formules

$$x = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \qquad y = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + \cdots + m_n},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

[1] Ou encore que OG est nul, c'est-à-dire que AB passe par O.

donnent le barycentre des masses $m_1, \ldots, m_n$ disposées aux points ayant respectivement pour coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n).$$

En faisant $n = 3$, on en déduirait la représentation biparamétrique d'un plan donné par trois points, sous la forme

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1 + \lambda + \mu}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1 + \lambda + \mu},$$
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1 + \lambda + \mu}.$$

En géométrie plane, il n'est pas sans intérêt de noter que les propriétés dont l'étude s'accommode d'axes obliques (sans complication d'écriture) sont aussi celles qui sont conservées par projection cylindrique : un tel mode de projection conserve bien en effet les relations d'alignement, de parallélisme, en même temps que le rapport algébrique de deux segments parallèles.

CHAPITRE III

ÉLÉMENTS A L'INFINI. ÉLÉMENTS IMAGINAIRES

I. — Classification des lignes et des surfaces. Lignes et surfaces algébriques.

34. Nous avons donné au n° 8 le principe de la représentation analytique des lignes et des surfaces. Les nombreux avantages de ce mode de représentation nous apparaissent déjà : nous serons maintenant en mesure de résoudre, au moyen de méthodes bien définies, maintes questions de géométrie, dont la recherche nous semblait hasardeuse tant que nous n'avions à notre disposition que les propositions de la géométrie pure ; ces problèmes seront en effet ramenés à l'étude de certains systèmes d'équations, au moyen de règles invariables. La part de l'imagination se trouvera donc notablement diminuée dans la tâche du chercheur.

En outre, la méthode analytique nous fournit le moyen d'établir une classification rationnelle des courbes et des surfaces. Par raison de simplicité, elle nous conduit à étudier d'abord les *courbes* et les *surfaces algébriques* (¹).

(¹) Les courbes et les surfaces qui ne sont pas algébriques sont dénommées *transcendantes*.

Dire qu'une courbe du plan xOy est algébrique, c'est dire qu'il existe entre les coordonnées x, y d'un de ses points une relation de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

où f désigne un polynome entier en x et y.

Dire qu'une surface est algébrique, c'est dire de même qu'il existe entre les coordonnées d'un de ses points une relation

$$f(x, y, z) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome entier en x, y, z.

Enfin, dans l'espace, on appelle courbe algébrique une courbe qui appartient à l'intersection de deux surfaces algébriques.

La théorie de ces courbes et de ces surfaces n'est en somme que la traduction, en langage géométrique, des propositions relatives aux systèmes d'équations algébriques.

Or ces dernières ne peuvent s'énoncer en toute généralité qu'en faisant intervenir des *solutions infinies* et des *solutions imaginaires*. En particulier, l'introduction des nombres complexes est de toute nécessité pour donner à l'algèbre la simplicité et l'unité : elle s'impose au même titre que celle des nombres négatifs et des nombres irrationnels. Mais au point de vue de la géométrie, la notion de nombre complexe présente un caractère nouveau : les éléments qu'elle conduit à définir sont *purement fictifs* ; la figure, si maladroite fût-elle, qui guidait le débutant, même s'il devait raisonner sur des points à coordonnées négatives ou irrationnelles, lui refuse maintenant la représentation des éléments dont nous parlons. Ceux-ci sont définis algébriquement, et cependant nous parviendrons à conserver aux raisonnements qui les concernent la forme géométrique ordinaire, moyennant des conventions appropriées. Il importe maintenant d'examiner en détail les notions nouvelles que nous venons d'annoncer et de donner à l'élève une entière confiance dans la valeur des raisonnements où elles interviennent ; nous serons à même d'en reconnaître la fécondité dans toute la suite de ce cours.

II. — Éléments à l'infini [1].

35. Coordonnées homogènes d'un point. — Restons, pour le moment, dans le domaine réel et proposons-nous de caractériser *un point à l'infini.*

Pour y parvenir, définissons d'abord les *coordonnées homogènes* d'un point M, qui, rapporté à trois axes rectangulaires, a pour coordonnées cartésiennes x, y, z. Considérons les équations

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad z = \frac{Z}{T};$$

si quatre nombres X, Y, Z, T les vérifient, ils constituent, par définition, un système de coordonnées homogènes de M. Il est clair qu'il y a une infinité de tels systèmes : si un premier répond à la question, tous les autres sont formés de nombres proportionnels.

Quel est le bénéfice de la complication de notations précédente ? Supposons que le point M s'éloigne indéfiniment sur une droite D de paramètres directeurs a, b, c, de sorte que ses coordonnées cartésiennes auront des expressions telles que

$$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho, \qquad z = z_0 + c\rho.$$

Alors que l'une au moins de celles-ci croît au delà de toute limite, lorsque M s'éloigne indéfiniment sur D, nous pouvons attribuer à ce point un système de coordonnées homogènes, par exemple

$$\frac{x_0 + a\rho}{\rho}, \quad \frac{y_0 + b\rho}{\rho}, \quad \frac{z_0 + c\rho}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho},$$

qui, dans les mêmes conditions, tendront vers des limites finies :

$$a, \quad b, \quad c, \quad 0.$$

Ces quatre nombres a, b, c, 0 sont, *par définition,* les coordon-

[1] Dans cette section, on peut raisonner indifféremment en coordonnées rectangulaires ou obliques.

nées homogènes du *point à l'infini* sur D. D'après cela, on voit que deux droites parallèles ont même point à l'infini.

Inversement, grâce à cette fiction du point à l'infini d'une direction, nous pouvons dire maintenant que tout système de nombres X, Y, Z, T *non tous nuls* constitue les coordonnées homogènes d'un point. Ce point est à distance finie si T n'est pas nul ; ses coordonnées cartésiennes sont alors $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$. Il est à l'infini si l'on a $T = 0$; il correspond alors à la direction de paramètres directeurs X, Y, Z.

Tout plan est maintenant représenté par une équation homogène du premier degré

$$(1) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0,$$

et la réciproque est exacte en toute généralité, lorsque A, B, C, D ne sont pas nuls tous les quatre, à la condition d'introduire une nouvelle fiction, celle du *plan de l'infini* ; supposons que A, B, C soient nuls sans que D le soit. L'équation (1) se réduit à

$$(2) \qquad T = 0.$$

Comme elle est du premier degré et qu'elle caractérise les points à l'infini, nous dirons qu'elle représente le plan de l'infini.

On convient que les équations

$$(1) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0, \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

$$(2) \qquad T = 0,$$

représentent une droite : on l'appelle *la droite de l'infini* du plan (1).

Grâce à ces nouvelles notions, les énoncés relatifs aux intersections de droites et de plans sont affranchis des restrictions de parallélisme.

Ainsi, nous pouvons maintenant affirmer que *deux plans distincts ont une droite commune et une seule*. Nous l'avons déjà établi lorsqu'ils ne sont pas parallèles. S'ils sont parallèles, leurs équations peuvent s'écrire

$$AX + BY + CZ + DT = 0, \qquad AX + BY + CZ + D'T = 0$$

D et D′ sont différents, puisque les plans sont distincts. Nous voyons alors qu'ils ont en commun la droite à l'infini du plan

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Nous voyons en même temps que plusieurs plans parallèles ont la même droite de l'infini.

Étant donnés *trois plans*, ils pourront avoir ou bien *un point commun*, ou bien *une droite commune*, ou enfin être *confondus*. L'élève le montrera en passant en revue tous les cas possibles, que voici :

1° Les plans forment un trièdre : un point commun unique à distance finie ;

2° Ils forment une surface prismatique : un point commun à l'infini sur les arêtes ;

3° Les plans passent par une même droite à distance finie ;

4° Les trois plans sont parallèles : une droite commune à l'infini ;

5° Les trois plans sont confondus.

36. Relations des notions précédentes avec la perspective. — La théorie précédente s'applique, en supprimant une coordonnée, à la géométrie plane. Soit un point M qui, par rapport à deux axes ox, oy, a pour coordonnées cartésiennes x, y. Considérons le trièdre de coordonnées OXYZ, dont les arêtes OX et OY sont respectivement parallèles à ox et oy, dont l'arête OZ passe par o, et qui est tel que l'équation du plan xoy par rapport à ce trièdre soit $z = +1$. Considérons alors un point quelconque de la droite OM ; ses coordonnées X, Y, Z par rapport à notre trièdre sont liées à x, y par les relations

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{1}.$$

Donc *les trois nombres* X, Y, Z *forment justement un système de coordonnées homogènes du point* M.

Prenons pour point de vue le point O et pour plan du tableau un plan (T) non parallèle à XOY. Chaque droite du plan (T) pourra être considérée comme la perspective d'une droite du plan xoy : il y a cependant exception pour la trace du plan (T) sur XOY : deux droites qui se coupent sur cette trace sont les perspectives de droites parallèles du plan xoy. Quand un point se rapproche de cette trace en suivant dans le plan (T) une droite déterminée, le point dont il est la perspective

s'éloigne indéfiniment dans xoy sur la droite correspondante. Pour ces raisons, on convient encore de considérer la trace de (T) comme la perspective d'une droite fictive du plan xoy, qu'on nomme la *droite de l'infini* de ce plan.

Cette notion, introduite au moyen de la perspective, est identique à celle de même nom que nous avons définie à l'aide des coordonnées homogènes. En effet, comme coordonnées homogènes, nous pouvons attribuer au point M les coordonnées cartésiennes X, Y, Z du point du plan (T) dont il est la perspective. Or la trace de ce plan (T) sur XOY correspond à $Z = 0$, ce qui montre bien l'équivalence de nos deux définitions.

37. Coordonnées homogènes du point qui divise un segment dans un rapport donné. — Soient les deux points M_1 et M_2 dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$x_1, y_1, z_1 \qquad \text{et} \qquad x_2, y_2, z_2.$$

Considérons le point M (x, y, z) de la droite $M_1 M_2$ tel que l'on ait

$$\overline{MM_1} + \lambda \overline{MM_2} = 0.$$

Nous avons trouvé au n° 7

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Soient maintenant X_1, Y_1, Z_1, T_1 et X_2, Y_2, Z_2, T_2 deux systèmes de coordonnées homogènes relatifs le premier à M_1, le second à M_2. Nous pouvons écrire

$$x = \frac{\frac{X_1}{T_1} + \lambda \frac{X_2}{T_2}}{1 + \lambda} = \frac{X_1 + \lambda \frac{T_1}{T_2} X_2}{T_1 + \lambda T_1};$$

posons

$$\lambda \frac{T_1}{T_2} = \Lambda;$$

il vient

$$x = \frac{X_1 + \Lambda X_2}{T_1 + \Lambda T_2};$$

de même, nous aurons

$$y = \frac{Y_1 + \Lambda Y_2}{T_1 + \Lambda T_2}, \qquad z = \frac{Z_1 + \Lambda Z_2}{T_1 + \Lambda T_2}.$$

En définitive, nous pouvons donc prendre, pour coordonnées homogènes de M,

(3) $X = X_1 + \Lambda X_2,\quad Y = Y_1 + \Lambda Y_2,\quad Z = Z_1 + \Lambda Z_2,\quad T = T_1 + \Lambda T_2.$

La démonstration que nous venons de donner fait intervenir l'hypothèse suivante : M_1 et M_2 sont à distance finie. On peut s'affranchir de cette restriction. Reportons-nous à la signification actuelle du mot *droite*. Il ne s'agit plus de l'image d'un fil tendu : une droïte est pour nous l'ensemble des points, c'est-à-dire des systèmes de nombres X, Y, Z, T non tous nuls, qui satisfont à deux équations distinctes telles que

(4) $AX + BY + CZ + DT = 0,\quad A'X + B'Y + C'Z + D'T = 0.$

Les formules (3) sont exactes quand T_1 et T_2 ne sont pas nuls ; on peut donc considérer qu'elles sont alors des conséquences algébriques des deux équations (4) jointes aux suivantes :

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + DT_1 = 0,\qquad A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1 + D'T_1 = 0,$$
$$AX_2 + BY_2 + CZ_2 + DT_2 = 0,\qquad A'X_2 + B'Y_2 + C'Z_2 + D'T_2 = 0.$$

Or il est clair que les conséquences de ces relations subsisteront quand on annulera T_1 ou T_2 ou ces deux quantités. Le fait que X_1 et X_2 s'annulent ne soulevait pour nous aucune difficulté. Il n'y en a pas davantage à annuler T_1 et T_2. Les formules (3) sont donc vraies en toute généralité.

Remarque. — Quand M_1 et M_2 sont à distance finie, des valeurs opposées de Λ proviennent de valeurs opposées de λ : elles fournissent donc des points *conjugués harmoniques* par rapport à M_1 et M_2. En prenant $T_1 + \Lambda T_2 = 0$ (ou $\lambda = -1$), on obtient le point à l'infini sur M_1M_2. Nous continuerons à dire qu'il est conjugué harmonique du point obtenu en prenant $T_1 - \Lambda T_2 = 0$ ou $\lambda = +1$, c'est-à-dire du milieu de M_1M_2. Plus généralement, si l'un des points M_1 ou M_2, ou même les deux, sont rejetés à l'infini, nous étendrons la définition des points conjugués harmoniques par rapport à M_1 et M_2 en disant qu'ils sont fournis par des valeurs opposées de Λ.

38. Conclusion. — Considérons une figure dans laquelle certains points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, etc... sont susceptibles de s'éloigner indéfiniment. Supposons que cette figure possède, quand tous ces points sont à distance finie, une propriété qui se traduise par une relation algébrique entre les coordonnées de ces points ; en passant en coordonnées homogènes, on obtient une relation

$$F(X_1, Y_1, Z_1, T_1 ; X_2, Y_2, Z_2, T_2 ; \ldots) = 0,$$

homogène par rapport aux quatre lettres de chaque groupe. Cette relation est vérifiée, moyennant certaines conditions, pour toutes les valeurs non nulles de T_1, T_2, ... D'après la théorie de l'identité des polynomes, elle reste vraie, dans les mêmes conditions, lorsque certaines des quantités T_1, T_2, etc... s'annulent.

Ainsi, grâce aux conventions précédentes, si nous avons établi une propriété algébrique d'une figure quand tous ses points sont à distance finie, nous pourrons continuer à l'appliquer, avec la même forme d'énoncé, quand certains d'entre eux s'éloignent indéfiniment.

Cette idée trouvera son application dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Pour donner à celle-ci toute sa généralité, il nous reste à introduire les éléments imaginaires et à en justifier l'usage.

III. — Éléments imaginaires.

39. Le nombre complexe se présente, en algèbre, comme un élément de calcul nouveau, *plus étendu* que le nombre algébrique ordinaire ou réel [1] : plus étendu, disons-nous, car, alors que les nombres algébriques sont représentés par les points d'un axe $x'x$, les nombres complexes ont leurs *images* réparties dans un plan. Soient deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$; à tout point de leur plan correspond, par définition, un nombre com-

[1] Il ne s'agit pas ici de reprendre entièrement la théorie des nombres complexes, mais d'en souligner quelques caractères, indispensables à la compréhension de cette délicate question. Pour l'exposé de ces principes, voir la note II de l'*Initiation aux méthodes vectorielles*, par Bouligand et Rabaté.

plexe qu'on nomme l'*affixe* de ce point. On peut, chose remarquable [1], définir sur ces nombres les mêmes opérations que sur les nombres algébriques, en conservant à ces opérations leurs propriétés formelles ; ainsi, l'addition et la multiplication donneront lieu encore aux identités

$$u+v=v+u, \qquad uv=vu,$$
$$(u+v)+w=u+(v+w), \qquad (uv)w=u(vw),$$
$$z(u+v)=zu+zv, \text{ etc...}$$

En un mot, toutes les identités fondamentales du calcul algébrique subsisteront. La forme des calculs sera entièrement conservée; en fin de compte, les nombres algébriques ordinaires apparaissent comme un cas particulier des nombres complexes, celui où l'image est sur $x'Ox$.

Non seulement les nouveaux nombres rendent toujours possible l'extraction d'une racine carrée, mais encore ils permettent la résolution de n'importe quelle équation algébrique. Voici en effet l'énoncé de la proposition connue sous le nom de théorème de d'Alembert :

Toute équation algébrique entière de degré m,

$$f(z)=A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots+A_{m-1}z+A_m=0,$$

dont les coefficients sont des nombres complexes quelconques, admet m racines.

En désignant ces racines par $z_1, z_2, \ldots, z_m$, on peut mettre le polynome $f(z)$ sous la forme

$$f(z)=A_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m).$$

Ces nombres $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ne sont pas forcément tous distincts. En rassemblant les facteurs égaux, on peut donner à $f(z)$ la forme

$$f(z)=A_0(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\ldots\ldots,$$

en supposant cette fois que $z_1, z_2 \ldots$ soient différents. L'exposant α_1 s'appelle alors l'ordre de multiplicité de la racine z_1, etc...

---

[1]) C'est bien là un fait remarquable : cette possibilité disparaîtrait si on essayait d'étendre la théorie au cas de trois dimensions.

Lorsque tous les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *sont réels*, les racines $z_1, z_2, \ldots$ sont ou bien réelles, ou bien deux à deux imaginaires conjuguées; si deux racines sont imaginaires conjuguées, elles ont, dans cette hypothèse, le même ordre de multiplicité.

Ces notions étant rappelées, montrons comment elles conduisent à élargir les définitions de la géométrie ordinaire ; nous allons être amenés à appeler points, plans, droites, de pures abstractions analytiques. Nous ferons voir néanmoins qu'on peut raisonner sur ces éléments comme sur les éléments de la géométrie réelle, sans faire le moindre calcul, alors qu'ils sont définis algébriquement.

40. Cela va résulter du procédé uniforme que nous emploierons pour donner nos nouvelles définitions.

Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, nous avons vu que trois nombres réels a, b, c déterminent un point et un seul. Nous appellerons point l'ensemble de trois nombres complexes $a_1 + ia_2$, $b_1 + ib_2$, $c_1 + ic_2$. Pour avoir encore plus de généralité et englober en même temps le cas des points à l'infini, nous utiliserons des coordonnées homogènes et nous appellerons point l'ensemble de quatre nombres complexes non tous nuls, soient

$$A_1 + iA_2, \qquad B_1 + iB_2, \qquad C_1 + iC_2, \qquad D_1 + iD_2.$$

Nous appellerons *plan* l'ensemble des points (au sens précédent) qui vérifient une équation de la forme

$$(1) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0,$$

et *droite* l'ensemble des points qui vérifient deux équations de cette forme, distinctes l'une de l'autre.

L'idée qui préside à ces généralisations est bien apparente, et il nous est maintenant facile de l'étendre. Considérons en géométrie réelle une ligne ou une surface d'un type déterminé et écrivons les équations de cette ligne ou l'équation de cette surface. Si, conservant la forme de ces équations, nous affranchissons les coefficients de la condition d'être réels ou de satisfaire à certaines inégalités qui résultaient de la définition géométrique de la ligne

ou de la surface ; si, en même temps, nous laissons aux coordonnées la latitude d'acquérir des valeurs complexes quelconques, nous continuerons à dire que notre ou nos équations représentent une surface ou une ligne fictive, à laquelle nous conserverons le nom qui la désignait en géométrie réelle.

Ainsi, dans tous les cas, nous dirons maintenant, en prenant des coordonnées non homogènes, que l'équation (cf. n° 9[b])

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \tag{2}$$

représente une *sphère* ; on peut en effet l'écrire sous la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

en posant

$$R^2=a^2+b^2+c^2-d.$$

Lorsque la sphère est réelle, a, b, c, d sont réels et satisfont manifestement à l'inégalité

$$a^2+b^2+c^2-d>0.$$

Grâce à nos conventions, nous nous affranchissons de cette restriction d'inégalité, et même nous permettons à a, b, c, d de prendre des valeurs complexes quelconques.

De même, nous donnerons maintenant le nom de *cercle* à l'ensemble des points x, y, z qui vérifient simultanément l'équation d'une sphère et celle d'un plan. En particulier, l'équation générale des cercles du plan xOy est

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0\,;$$

pour que le cercle soit réel, il faut et il suffit que a, b, c soient réels et vérifient l'inégalité

$$a^2+b^2-c>0.$$

Pour généraliser les notions de distances (distance de deux points, distance d'un point à un plan ou à une droite, plus courte distance de deux droites), celles de puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère, nous prendrons les expressions analytiques qui représentent ces divers éléments en géométrie réelle, et nous conviendrons de leur conserver leurs désignations respectives lorsque les points, lignes ou surfaces

considérés deviennent imaginaires. Nous procéderons de même pour étendre la définition de tout élément métrique (1).

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse de la *puissance d'un point par rapport à une sphère*. Plaçons-nous d'abord en géométrie réelle. Évaluons la puissance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à la sphère

$$(2) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0\,;$$

soit M_0PQ une sécante issue de M_0 et rencontrant la sphère en P et Q. Pour calculer le produit $\overline{M_0P}.\ \overline{M_0Q}$, orientons arbitrairement cette sécante. Un point M de l'axe ainsi déterminé aura pour coordonnées $x_0 + \alpha\rho$, $y_0 + \beta\rho$, $z_0 + \gamma\rho$, en appelant α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe et ρ la valeur algébrique de M_0M. L'équation du second degré qui admet pour racines M_0P et M_0Q s'obtient en écrivant que ρ doit être choisi de manière à fournir un point de la sphère. Elle est donc

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho, z_0 + \gamma\rho) = 0.$$

Le coefficient de ρ^2 est $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, c'est-à-dire l'unité, et le terme indépendant est $f(x_0, y_0, z_0)$. Il ne contient pas α, β, γ, et par suite la valeur du produit MP. MQ est bien indépendante de la sécante ; nous avons

$$\overline{MP}\,.\,\overline{MQ} = f(x_0, y_0, z_0).$$

Dans tous les cas, nous appellerons puissance d'un point, réel ou imaginaire, par rapport à une sphère, réelle ou imaginaire, dont l'équation a été écrite sous la forme (2), le résultat de la substitution des coordonnées non homogènes de ce point dans le premier membre de (2).

Les éléments métriques de la géométrie réelle (distances, angles, puissances, etc...) ont, cela va sans dire, des valeurs indépendantes du système de coordonnées qu'on adopte pour leur calcul, et qui n'intervient que comme un simple auxiliaire. Il est facile de montrer que cette propriété indispensable s'applique aux éléments abstraits de même nom. En effet, un changement de coordonnées correspondra désormais pour nous à une substitution de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} x = A + ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y = B + bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z = C + cx_1 + c'y_1 + c''z_1, \end{cases}$$

(1) **L'évaluation des angles se ramène toujours, par la trigonométrie, à celle de rapports de distances.**

où les lettres A, B, C et $a, b, \ldots, c''$ peuvent représenter maintenant des nombres complexes. En nous en tenant à ne considérer que des axes rectangulaires, les neuf quantités $a, b, \ldots, c''$ satisfont toujours aux six relations du n° 12 bis, page 41. Raisonnons, pour fixer les idées, sur la distance d'un point au plan qui, dans le premier système, a pour équation

$$ux + vy + wz + h = 0.$$

Le carré de cette distance est, en appelant x, y, z les coordonnées du point dans le premier système,

$$(4) \qquad \frac{(ux + vy + wz + h)^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Dans le second système, nous obtiendrons une autre expression

$$(5) \qquad \frac{(u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + h_1)^2}{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2},$$

qui a la même valeur que (4) lorsque le point, le plan et le changement de coordonnées sont réels. Ce résultat étant exact, il est donc possible de le vérifier algébriquement : les équations (3) permettront d'exprimer u_1, v_1, w_1, h_1 en fonction de u, v, w, h ; en tenant compte des six relations entre les $a, b, \ldots, c''$, nous en déduirons, par un jeu de calcul algébrique, l'identité des expressions (4) et (5). Mais ce calcul, qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'expliciter, gardera toute sa valeur lorsque certaines des quantités qui y interviennent deviendront imaginaires : l'identité des expressions (4) et (5) subsiste donc encore. On pourrait, pour tout élément métrique, renouveler le raisonnement qui précède. On voit le rôle essentiel que joue ici la *conservation de la forme*, sur laquelle nous avons insisté au début.

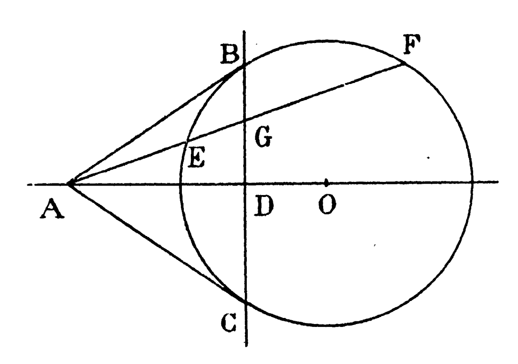
41. C'est encore grâce à elle qu'il est possible d'appliquer aux notions abstraites que nous venons de définir des raisonnements en tout point analogues à ceux que l'on ferait s'il s'agissait d'une figure réelle, et, par suite, affectant la forme purement géométrique, précieuse à cause de sa simplicité.

Pour être mieux compris, nous traiterons d'abord un exemple simple.

A une circonférence (O), menons, par un point A extérieur, les tangentes AB et AC : la corde des contacts BC rencontre AO en D, et une sécante AEF issue de A, en G. En vertu des égalités

$$AE \cdot AF = \overline{AB}^2 = AO \cdot AD,$$

le cercle circonscrit au triangle EDF passe par le point O : ce dernier, sur ce cercle, étant le milieu de l'arc EF, la droite DO est la bissectrice extérieure de l'angle EDF, qui admet par suite DB comme bissectrice intérieure, si bien que les points A et G sont conjugués harmoniques par rapport à E et F. En appelant I le milieu de AG, nous avons donc



$$\overline{IA}^2 = IE \cdot IF.$$

La tangente menée de I à la circonférence O a donc pour longueur IA ; par suite *cette circonférence est orthogonale au cercle de diamètre* AG.

Nous allons nous proposer d'établir que cette propriété subsiste si le point G, au lieu d'être, comme dans le raisonnement précédent, entre B et C, est sur le prolongement de cette droite. La différence entre les deux cas apparaît immédiatement : dans la nouvelle hypothèse, nous ne pouvons plus considérer sur la figure les points E et F. Au point de vue de la géométrie ordinaire, notre premier raisonnement est donc complètement en défaut.

Grâce aux conventions de langage précédentes, nous pouvons cependant considérer que ce raisonnement établit encore la propriété énoncée. En effet, celle-ci est exacte lorsque G est entre B et C : dans ces conditions il est donc possible de la vérifier par le calcul. On peut même agencer cette vérification de manière que chaque équation, qui constitue un chaînon de ce calcul, exprime la propriété qui intervient, avec le même numéro d'ordre, dans l'enchaînement du raisonnement précédent. Mais ce jeu de calculs conservera sa valeur lorsque les points de rencontre de la droite AG et du cercle deviendront imaginaires. Le raisonnement géométrique, qui menait au même but que la vérification algébrique dans un cas particulier de figure, peut donc être regardé maintenant comme embrassant tous les cas.

Ainsi, la validité des raisonnements, de forme géométrique, que nous entreprendrons sur les éléments fictifs précédemment introduits,

se trouvera garantie par une suite de calculs, dont ces raisonnements ne constituent au fond qu'une interprétation, valable au point de vue réel dans un cas particulier, mais pouvant embrasser tous les cas, grâce aux conventions qui précèdent.

42. Éléments isotropes. — Ces conventions conduisent par contre à énoncer, pour certains de nos éléments géométriques fictifs, des propriétés qui nous paraissent paradoxales, à cause de l'habitude que nous avons de penser aux figures réelles. Hâtons-nous de dire que ces paradoxes ne sont qu'apparents, et qu'ils n'infirment nullement la théorie que nous venons d'exposer.

En géométrie réelle, il faut et il suffit que la distance de deux points soit nulle pour que ces points soient confondus. Dans la géométrie généralisée, cette condition ne suffit plus, car une somme de trois carrés peut être nulle sans que chacun le soit, s'il s'agit de carrés de nombres complexes. La distance M_1M_2 sera nulle, si l'on a entre les coordonnées de M_1 et M_2 la relation

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0.$$

En remarquant que $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ forment un système de paramètres directeurs de M_1M_2, on peut encore dire :

Pour que la distance de deux points soit nulle, il faut et il suffit que les paramètres directeurs a, b, c de la droite qui les joint soient liés par la relation

$$(1) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Une telle direction se nomme *isotrope*, et il est clair qu'après un changement de coordonnées rectangulaires, à cause de la conservation de la forme d'une distance, elle restera encore isotrope. Entre ses nouveaux paramètres directeurs a_1, b_1, c_1, nous aurons la même relation

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0.$$

En particulier, par chaque point du plan xOy il passe deux droites isotropes, ayant pour coefficients angulaires, l'une $+i$, l'autre $-i$ [faire, dans la relation (1), $a = 1$ et $c = 0$]. Par chaque point de l'espace, on peut mener une infinité de droites isotropes qui

forment une famille à un paramètre ; nous dirons, par la suite, qu'elles forment le *cône isotrope* ayant pour sommet ce point.

Le lieu des points à l'infini des droites isotropes est la ligne fictive représentée par les deux équations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \qquad T = 0,$$

et que l'on nomme *cercle imaginaire de l'infini.* Cette ligne est en effet la section du plan de l'infini par la sphère de centre O et de rayon zéro. *Toute sphère* a une équation homogène de la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2T(aX + bY + cZ) + dT^2 = 0,$$

et par suite *passe par le cercle de l'infini.* Les équations de ce cercle sont conservées dans toute transformation de coordonnées rectangulaires.

De même, dans le plan xOy, *tout cercle*

$$X^2 + Y^2 + 2T(aX + bY) + dT^2 = 0$$

coupe la droite de l'infini en deux points fixes, définis par

$$X^2 + Y^2 = 0, \qquad T = 0.$$

On peut leur attribuer respectivement pour coordonnées homogènes $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$. Ces points s'appellent les *points cycliques* : ce sont les points à l'infini communs à toutes les droites isotropes du plan. Leurs coordonnées homogènes sont conservées dans une transformation d'axes rectangulaires.

En prenant la formule qui donne l'angle de deux directions et supposant que ces deux directions viennent se confondre avec une direction isotrope, on obtient ce résultat, choquant au premier abord, que l'angle d'une droite isotrope avec elle-même est indéterminé. Il ne faut voir là que la traduction, dans un langage conventionnel, de l'indétermination d'une forme algébrique.

Loin de nous gêner en quoi que ce soit, les éléments isotropes joueront un rôle essentiel dans de nombreuses et importantes questions. Le fait d'établir qu'une certaine droite fictive est perpendiculaire à elle-même nous permettra en particulier d'affirmer qu'elle est isotrope (c'est là une réciproque que l'élève démon-

trera), et pourra, dans certains raisonnements, nous apporter un précieux secours (¹).

43. Rôle des éléments réels et des éléments imaginaires conjugués. — Soient quatre nombres complexes X, Y, Z, T et les quatre nombres conjugués X′, Y′, Z′, T′. Si on les considère comme les coordonnées homogènes de deux points M et M′, on dit que ces points sont *imaginaires conjugués*. En supposant, bien entendu, que les axes sont réels, il est facile de voir qu'il s'agit là d'une propriété de M et M′ qui subsiste lorsqu'on prend de nouveaux axes (réels).

La droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle.

En effet, si ces points sont M et M′, la droite qui les joint est l'ensemble des points de coordonnées homogènes

$$X + \Lambda X', \qquad Y + \Lambda Y', \qquad Z + \Lambda Z', \qquad T + \Lambda T',$$

où Λ est une quantité complexe quelconque. En faisant $\Lambda = +1$, ces quatre quantités sont réelles; en faisant $\Lambda = -1$, elles sont imaginaires pures et leurs rapports sont réels. Notre droite, contenant deux points réels, est donc elle-même réelle.

Si un point M appartient à une courbe plane ou à une surface algébrique représentée par une équation à coefficients réels, il en est de même de son conjugué M′, puisque si dans un polynome $f(X, Y, Z, T)$ à coefficients réels, on substitue aux valeurs initiales des variables leurs conjuguées, la seconde valeur de f est conjuguée de la première. Si la première est nulle, il en est donc de même de la seconde.

Par contre, si le point M décrit une ligne ou une surface dont l'équation contient des coefficients imaginaires, le point M′ décrira une autre ligne ou une autre surface, qui est dite imaginaire conjuguée de la première.

(¹) En axes obliques, l'introduction d'éléments imaginaires s'effectue conformément aux mêmes principes. Toutefois, il importe de remarquer, que tout ce que nous avons dit concernant les éléments isotropes suppose exclusivement les axes rectangulaires.

Ainsi, si le point M est dans le plan imaginaire

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

le point M′ se trouve dans le plan

$$A'X + B'Y + C'Z + D'T = 0,$$

dont les coefficients sont conjugués de leurs correspondants dans la première équation. Ce plan est dit *plan imaginaire conjugué* du premier.

En considérant le faisceau linéaire déterminé par les deux plans précédents,

$$(A + \Lambda A')X + (B + \Lambda B')Y + (C + \Lambda C')Z + (D + \Lambda D') = 0,$$

on voit qu'il renferme deux plans réels correspondant, le premier à $\Lambda = +1$ et le second à $\Lambda = -1$. Ainsi, *la droite d'intersection de deux plans imaginaires conjugués est réelle.*

L'élève définira de même la conjuguée d'une droite du plan xOy et montrera que ces droites se coupent en un point réel. C'est dire que sur toute droite imaginaire du plan xOy, il existe un point réel. Cette propriété ne s'étend pas d'ailleurs en toute généralité aux droites de l'espace : l'élève démontrera que ce n'est qu'à titre exceptionnel qu'une droite de l'espace et sa conjuguée peuvent être situées dans un même plan.

IV. — Ordre d'une courbe plane ou d'une surface algébrique. Faisceaux de droites. Cônes [1].

44. Soit

$$f(x, y) \equiv \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \cdots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique du plan xOy, dont le premier membre est un polynome de degré m en x et y, dans lequel les termes d'un même degré ont été rassemblés de manière à former des groupes homogènes φ_m, φ_{m-1} ... Si l'on passe en coor-

(1) Dans cette section, les axes peuvent être supposés indifféremment rectangulaires ou obliques.

données homogènes, son équation deviendra

$$F(X, Y, T) \equiv T^m f\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) \equiv \varphi_m(X, Y) + T\varphi_{m-1}(X, Y) + \cdots + T^{m-1}\varphi_1(X, Y) + T^m\varphi_0 = 0.$$

Son premier membre se présentera donc sous la forme d'un polynome homogène et de degré m en X, Y, T.

Si l'on a de même une surface algébrique

$$f(x, y, z) \equiv \varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \cdots + \varphi_1(x, y, z) + \varphi_0 = 0,$$

son équation deviendra, lorsqu'on passe en coordonnées homogènes,

$$F(X, Y, Z, T) \equiv \varphi_m(X, Y, Z) + T\varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \cdots + T^{m-1}\varphi_1(X, Y, Z) + T^m\varphi_0 = 0.$$

Son premier membre sera encore homogène et de degré m en X, Y, Z, T.

Nous allons montrer que le nombre m indique une propriété importante de la courbe et de la surface. C'est d'ailleurs la considération des points imaginaires ou à l'infini qui permet d'énoncer cette propriété en toute généralité. La voici :

Toute droite (sous-entendez *du plan* xOy, s'il s'agit de la courbe) *rencontre la courbe ou la surface en* m *points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou à l'infini.*

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la surface représentée par

$$F(X, Y, Z, T) = 0, \tag{1}$$

équation dont le premier membre est homogène et de degré m. Prenons la droite qui joint deux points $M_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$ et $M_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$; supposons que ce dernier point soit en dehors de la surface. Un point de la droite précédente a des coordonnées homogènes de la forme

$$X = X_1 + \Lambda X_2, \quad Y = Y_1 + \Lambda Y_2, \quad Z = Z_1 + \Lambda Z_2, \quad T = T_1 + \Lambda T_2.$$

Pour qu'il soit sur la surface, il faut et il suffit que Λ soit choisi de manière que l'on ait la relation (1), c'est-à-dire que Λ soit

racine de l'équation

$$(2) \qquad F(X_1 + \Lambda X_2, Y_1 + \Lambda Y_2, Z_1 + \Lambda Z_2, T_1 + \Lambda T_2) = 0.$$

Si nous la développons, nous voyons qu'elle est de degré m en Λ ; son terme de plus haut degré s'obtient en effet en négligeant dans chacun de nos binomes $X_1 + \Lambda X_2$, ... , les termes X_1, ... , indépendants de Λ. Donc le terme de plus haut degré est

$$\Lambda^m F(X_2, Y_2, Z_2, T_2).$$

Son coefficient n'est pas nul, puisque M_2 n'est pas sur la surface.

La proposition énoncée nous apparaît donc comme une conséquence immédiate du théorème de d'Alembert [1]. Il est entendu que chaque point d'intersection fourni par une racine Λ de l'équation (2) doit compter dans le bilan final pour autant d'unités qu'il y en a dans l'ordre de multiplicité de cette racine. Nous voyons également que l'introduction des points à l'infini et celle des points imaginaires sont absolument nécessaires pour assurer la généralité de cette proposition.

On fait un raisonnement identique pour établir la constance du nombre des points d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique plane.

Remarque. — La démonstration précédente suppose que M_2 ne soit pas situé sur la surface ; si la droite n'appartient pas tout entière à la surface, elle la rencontre en un nombre fini de points (conséquence de la théorie de l'identité) et alors ce choix de M_2 est toujours possible. Pour que la démonstration précédente soit valable, il suffit donc de supposer que la droite ne fasse pas entièrement partie de la surface ou de la courbe. Remarquons enfin que la théorie de l'identité des polynomes nous conduit encore au résultat suivant :

Pour qu'une droite appartienne entièrement à une surface algébrique, ou à une courbe algébrique dont le plan la contient, il suffit que le nombre de ses points communs avec la courbe ou la surface dépasse d'une unité le degré de l'équation représentant cette courbe ou cette surface.

Au degré de cette équation, on donne le nom d'*ordre* de la courbe

[1] Pour une racine Λ de l'équation (2), les quantités $X_1 + \Lambda X_2$, ..., ne sont pas nulles toutes les quatre, car nous avons implicitement supposé que M_1 et M_2 sont distincts.

plane ou de la surface. A cause de la signification que nous venons d'indiquer, il est clair que ce degré reste inaltéré lorsqu'on fait une transformation d'axes de coordonnées. Cette propriété peut d'ailleurs se vérifier directement ; nous invitons l'élève à faire cette vérification, à titre d'exercice, en partant de ce fait que les formules de transformation sont linéaires.

Il est manifeste que la notion d'ordre nous fournit le point de départ d'une classification naturelle des courbes planes et des surfaces algébriques. Lorsque l'ordre est 1, on obtient la droite et le plan. On étudiera ensuite les courbes d'ordre 2, puis 3, 4, ... etc...

45. Cas de décomposition. — Nous avons vu qu'un polynome à une variable, de degré m, est le produit de m facteurs linéaires. La même propriété n'est pas vraie, en général, pour des polynomes à plusieurs variables. Étant donné un polynome à deux variables $f(x, y)$, ou à trois variables $f(x, y, z)$, ayant pour degré m, il est en général impossible (1) de l'écrire sous la forme d'un produit de polynomes de degrés moins élevés : on dit alors que le polynome donné est *indécomposable*, et on applique la même épithète à la courbe ou à la surface algébrique obtenue en l'annulant. Supposons, par contre, qu'à titre exceptionnel, le polynome donné puisse s'écrire

$$f(x, y) = f_1^\alpha(x, y) f_2^\beta(x, y) \dots f_q^\lambda(x, y),$$

ou

$$f(x, y, z) = f_1^\alpha(x, y, z) f_2^\beta(x, y, z) \dots f_q^\lambda(x, y, z),$$

étant entendu que $f_1, f_2, \dots, f_q$ sont des polynomes indécomposables.

Pour qu'un tel polynome soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs le soit. Donc nous pouvons dire : en l'annulant, nous obtiendrons une courbe ou une surface décomposée, en

$f_1 = 0$, à l'ordre de multiplicité α,
$f_2 = 0$, — β,
. . . .

Ne pourrait-on pas exclure ces courbes et ces surfaces décom-

(1) L'élève verra immédiatement que $x^2 + y^2 - R^2$ ne peut pas être égalé au produit de deux facteurs du premier degré.

posées, dont l'étude se ramène à celle d'un certain nombre d'autres courbes ou surfaces indécomposables ? Il convient de les conserver, si l'on veut conserver toute la généralité de certaines théories. Donnons-en dès maintenant un exemple :

Toute section plane d'une surface d'ordre m est une courbe d'ordre m.

Pour établir ce théorème, on peut se borner, d'après ce qui été dit au n° 38, à considérer le cas où le plan est à distance finie. Prenons-le alors pour plan xOy. Il suffit de faire $Z = 0$ dans l'équation homogène de la surface pour obtenir le résultat annoncé ([1]). Mais il est clair que la nouvelle équation

$$F(X, Y, 0, T) = 0$$

pourra représenter une courbe, formée d'un certain nombre d'autres lignes, de degrés moins élevés, et intervenant chacune avec un certain ordre de multiplicité. La considération de telles courbes algébriques est donc indispensable à la généralité du théorème actuel.

Ces considérations nous conduisent à *regarder deux courbes algébriques comme identiques* si une droite quelconque les coupe aux mêmes points, avec le même ordre de multiplicité. Il est clair, en effet, qu'au point de vue où nous nous plaçons, il nous est impossible de dire que les deux équations

$$f_1(x, y)f_2(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1^2(x, y)f_2(x, y) = 0,$$

où f_1 et f_2 sont supposés indécomposables, représentent la même courbe : cela serait absolument contraire à la notion d'*ordre*. A partir de la définition qui précède, démontrons maintenant un théorème important :

Théorème. — *Pour que deux équations algébriques*

$$f(x, y) = 0 \qquad et \qquad g(x, y) = 0$$

([1]) Si l'on néglige de prendre des coordonnées homogènes dans ce genre de questions, on peut très bien être conduit à des résultats qui semblent mettre le théorème précédent en défaut. C'est ainsi qu'on trouverait une droite pour section par le plan xOy de la surface du second ordre $x = yz$. Ceci montre une fois de plus la nécessité de considérer les éléments à l'infini.

représentent la même courbe, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par λ un nombre constant, l'identité suivante :

$$g(x, y) \equiv \lambda f(x, y).$$

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $f=0$ et $g=0$ représentent la même courbe, en coupant par la droite $x=x_0$, nous obtenons, quel que soit x_0, deux équations en y

$$f(x_0, y)=0, \qquad g(x_0, y)=0,$$

qui doivent avoir les mêmes racines. Donc, quel que soit x_0, le quotient $\frac{f(x_0, y)}{g(x_0, y)}$ sera indépendant de y. Nous aurons donc nécessairement une identité de la forme

$$\frac{g(x, y)}{f(x, y)} \equiv \varphi(x);$$

en donnant à y une valeur y_0, nous démontrerons de même que $\frac{g}{f}$ ne dépend pas de x, et, par suite, se réduit à une constante λ. (C. q. f. d.)

La théorie que nous venons de développer pour les lignes planes s'étend immédiatement au cas des surfaces algébriques. Deux surfaces décomposées ne sont identiques que si les différents facteurs sont affectés des mêmes exposants dans les décompositions des premiers membres.

Remarque. — Si une droite fait tout entière partie d'une courbe algébrique plane représentée par l'équation homogène

$$F(X, Y, T)=0,$$

celle-ci se décompose, et, en supposant que la droite ait pour équation

$$AX+BY+CT=0,$$

on peut écrire une identité de la forme

$$F(X, Y, T) \equiv (AX+BY+CT)G(X, Y, T).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'établir cette identité, en se plaçant dans le cas, auquel on peut toujours se ramener, où la droite considérée est $Y=0$.

Par contre, le fait qu'une droite est tout entière sur une surface n'indique pas que celle-ci se décompose. La surface définie en coordonnées non homogènes par

$$x-yz=0$$

est indécomposée. Tout plan parallèle à xOy ou xOz la coupe suivant une droite.

46. Cônes. Faisceaux plans de droites. — Un cône est, par définition, le lieu des droites issues d'un point fixe et s'appuyant sur une courbe fixe.

Théorème. — *Toute équation*

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

dont le premier membre est homogène en x, y, z représente un cône ayant pour sommet l'origine.

En effet, considérons la section (C) de cette surface par le plan $z = +1$. Elle est définie par les deux équations

$$(C) \qquad z = +1, \qquad F(x, y, 1) = 0.$$

Soit $m(x, y, 1)$ un point de la courbe (C). A cause de l'homogénéité, tout point $M(X, Y, Z)$ de la droite Om est sur la surface. Inversement, si un point M est sur la surface, la droite OM perce le plan $z = +1$ en un point de la courbe (C). La surface est donc le lieu d'une droite, issue de O, et assujettie à rencontrer une courbe du plan $z = +1$. C'est donc bien un cône de sommet O.

Dans le raisonnement précédent, nous avons regardé X, Y, Z comme les coordonnées non homogènes du point M, mais il est évident que l'équation (1) reste la même en vertu de son homogénéité, que les coordonnées adoptées soient elles-mêmes homogènes ou non.

Suivant les cas, nous pourrons regarder l'équation (1) comme l'équation d'un cône, ou comme l'équation homogène d'une courbe plane : si nous l'écrivons alors

$$(1^{\text{bis}}) \qquad F(X, Y, Z) = 0,$$

Z jouera le rôle de variable d'homogénéité.

Chaque proposition de la théorie des courbes algébriques planes donne par suite naissance à une proposition relative aux cônes algébriques, qui est un second mode d'interprétation géométrique du même fait algébrique. Associons à l'équation (1)

celle d'un plan passant par l'origine

(2) $$Ax + By + Cz = 0.$$

Si nous écrivons cette équation sous la forme

(2bis) $$AX + BY + CZ = 0,$$

elle représente une droite (en coordonnées homogènes) coupant la courbe (1bis) en n points. Nous en déduisons le résultat suivant :

Le cône (1), *d'ordre n, est coupé par un plan passant par son sommet suivant un système de n droites.*

Les nombres qui nous représentaient les coordonnées homogènes d'un point commun à la courbe et à la sécante, sont devenus les paramètres directeurs d'une droite commune au cône et au plan sécant mené par son sommet (comparez n° 36).

Toute autre section plane de ce cône sera, d'après une proposition plus générale relative à toute surface algébrique d'ordre n, une courbe d'ordre n. Inversement, le cône ayant pour sommet un point O et pour base une courbe algébrique au plan de laquelle O est extérieur, a même ordre que cette courbe. De tout cela il résulte que *l'ordre d'une courbe algébrique plane se conserve par perspective* : ce fait est extrêmement important, il met en lumière l'identité de propriétés de ces courbes aux points à distance finie d'une part, aux points à l'infini d'autre part ; ou du moins des propriétés qui se conservent par la perspective, et auxquelles nous donnerons plus tard le nom de propriétés projectives : *l'ordre est donc lui-même une propriété projective.*

Revenons à la section d'un cône de sommet O par un plan contenant ce point et supposons que ce plan soit justement xOy. En faisant $z = 0$ dans l'équation (1), nous obtenons une équation algébrique homogène en x, y, et inversement toute équation homogène en x, y peut être regardée comme provenant de l'annulation de z dans une équation algébrique homogène en x, y, z. D'où le théorème suivant :

Toute équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

homogène et de degré n en x et y, représente, dans le plan xOy, un faisceau de n droites passant par l'origine.

Comme exercice, l'élève retrouvera cette proposition directement. Nous le prions également de traiter la question suivante :

On donne l'équation

$$(3) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$

qui représente deux droites issues de O. Former l'équation aux coefficients angulaires t', t'' de ces droites, et montrer que la condition d'orthogonalité est $A + C = 0$. Former aussi l'équation donnant les coefficients angulaires θ', θ'' des deux bissectrices des angles formés par ces droites, en partant de la relation

$$\theta'\theta'' = -1$$

et de la relation qui exprime l'harmonicité des points de rencontre de la droite $x = +1$, avec ces bissectrices d'une part et les droites du faisceau (3) d'autre part, soit

$$2(\theta'\theta'' + t't'') = (t' + t'')(\theta' + \theta'').$$

Former l'équation du faisceau de ces bissectrices.

On trouvera

$$(A - C)xy + B(y^2 - x^2) = 0.$$

Quand A, B, C sont réels, ces bissectrices le sont elles-mêmes, alors que les droites du faisceau (3) pourraient être imaginaires conjuguées.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES LIGNES ET DES SURFACES DE LA GÉOMÉTRIE RÉELLE (¹)

I. — Courbes planes définies par une équation $y = f(x)$.

47. Tangente en un point. — Soit la courbe $y = f(x)$, et $M(x, y)$ un point de cette courbe ; si $f(x)$ *a une dérivée, la courbe admet en* M *une tangente,* dont le coefficient angulaire est $f'(x)$. L'équation de cette tangente est donc

$$Y - y = y'(X - x), \tag{1}$$

en appelant X et Y les coordonnées courantes d'un de ses points. Nous nous bornons à rappeler l'énoncé de cette proposition, qui a été établie en algèbre dès que la dérivée a été définie. A titre d'exercice, nous proposons à l'élève de démontrer le résultat suivant, commode dans certaines applications :

Si la courbe $y = f(x)$ *passe par l'origine, le coefficient angulaire de la tangente en ce point est la limite vers laquelle tend* $\frac{y}{x}$ *lorsque* x *tend vers zéro.*

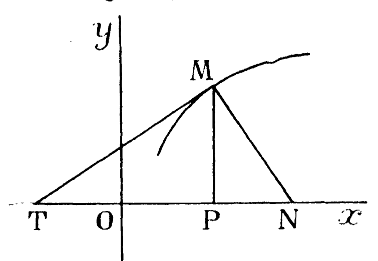
Normale. — De ce qui précède, il résulte que le coefficient

(¹) Toutes les formules de ce chapitre, à l'exception de celles qui font intervenir la normale à une courbe ou à une surface, s'appliquent indifféremment en coordonnées rectangulaires ou obliques.

angulaire de la normale en M est $-\frac{1}{y'}$. Nous pouvons donc écrire l'équation de cette droite sous la forme

$$(2) \qquad X - x + y'(Y - y) = 0.$$

Sous-tangente, sous-normale. — Soient T et N les points de rencontre de la tangente et de la normale en M avec Ox ; P la projection de M sur cet axe. Par définition, nous donnerons à $\overline{PT}$ le nom de *sous-tangente*, à $\overline{PN}$ celui de *sous-normale*.

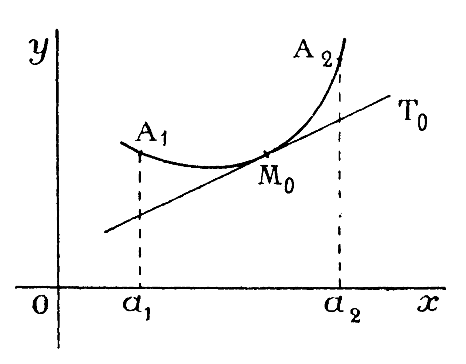


La valeur de PT est celle que prend dans l'équation (1) la quantité $X - x$ lorsqu'on fait $Y = 0$. Celle de PN s'obtient par le même mécanisme, au moyen de l'équation (2). On trouve

$$\overline{PT} = -\frac{y}{y'}, \qquad \overline{PN} = yy'.$$

48. Concavité, convexité, inflexion. — **Théorème.** — *Si en tout point d'un arc A_1A_2 de la courbe, la fonction $f(x)$ admet une dérivée seconde positive, cet arc est, par rapport à chacune de ses tangentes, situé tout entier du côté des y positifs.*

En effet, soient $M_0(x_0, y_0)$ un point de l'arc A_1A_2 et M_0T_0 la tangente correspondante. La fonction $f'(x) - f'(x_0)$ a pour dérivée $f''(x)$, qui est positive dans tout l'intervalle a_1a_2. Donc cette fonction est croissante; s'annulant pour x_0, elle est négative avant, positive après. Donc la fonction



$$F(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0),$$

qui admet pour dérivée $f'(x) - f'(x_0)$, est décroissante avant x_0 et croissante après. Comme elle est nulle pour x_0, elle est positive avant et après cette valeur dans tout l'intervalle a_1a_2. Géométriquement, cela signifie que, par rapport à la tangente M_0T_0, l'arc A_1A_2 est entièrement situé du côté des y positifs (C. q. f. d.).

C'est ce qu'on exprime en disant que *l'arc* A_1A_2 *tourne sa concavité vers les* y *positifs*. On démontre de même que si $f''(x)$ est négatif en tout point de l'intervalle a_1a_2, l'arc A_1A_2 est situé, par rapport à chacune de ses tangentes, du côté des y négatifs; on dit qu'il tourne sa concavité vers les y négatifs.

On appelle *point d'inflexion* un point où la concavité change de sens. Supposons que, le long de la courbe $y = f(x)$, il existe une dérivée seconde continue et n'admettant que des zéros isolés. *Les points d'inflexion seront ceux pour lesquels* $f''(x)$ *s'annule en changeant de signe.*

Supposons que pour x_0, $f''(x)$ s'annule. Pour savoir s'il y a changement de signe, supposons que la fonction $f(x)$ soit développable par la formule de Taylor, et que l'on ait

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(p-1)}(x_0) = 0, \qquad \text{avec} \qquad f^{(p)}(x_0) \neq 0.$$

Nous aurons

$$f''(x) = \frac{(x - x_0)^{p-2}}{(p-2)!} f^{(p)}(x_0) + \cdots$$

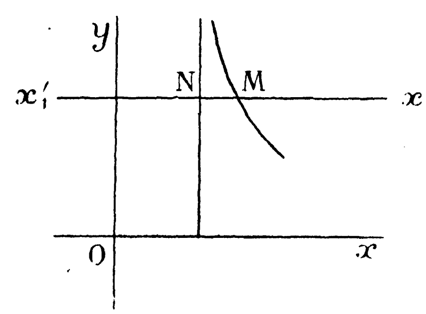
Pour des valeurs de x voisines de x_0, le second membre a le signe de son premier terme. Donc dans ce cas, pour qu'il y ait inflexion, il faut que $f''(x_0)$ soit nul et que parmi les dérivées d'ordre dépassant deux, la première qui ne s'annule pas pour x_0 soit d'ordre impair.

49. Branches infinies. — On dit qu'une branche infinie de courbe admet une *direction asymptotique* Δ, si la droite AM, qui joint un point fixe A à un point M de cette courbe, tend vers une parallèle à Δ quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche. C'est là, manifestement, une propriété de la branche, indépendante de la manière dont le point A est choisi.

On dit qu'une branche infinie de courbe admet pour *asymptote* une droite D si la distance d'un point M de la courbe à cette droite tend vers zéro quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche. L'existence d'une asymptote implique celle d'une direction asymptotique, mais l'exemple de la courbe $y = \sin x$, qui admet pour direction asymptotique Ox, nous montre déjà que la réciproque n'est pas vraie.

Pour obtenir une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$, il faut supposer qu'une au moins des deux coordonnées devienne infinie. Distinguons deux cas.

1er cas : Une seule des coordonnées devient infinie. — Supposons, par exemple, que y croisse indéfiniment quand x tend vers une valeur finie x_0 : *la courbe est alors asymptote à la droite* $x = x_0$. En effet, le segment



$$x - x_0 = \overline{NM},$$

de l'axe x'_1x_1 mené par M parallèlement à Ox et dans le même sens, tend vers zéro quand M s'éloigne indéfiniment, ce qui est bien conforme à la définition de l'asymptote.

Réciproquement, si une branche de la courbe est asymptote à $x = x_0$, le point M s'éloigne indéfiniment quand x tend vers x_0 et, par suite, la valeur absolue de $f(x)$ augmente indéfiniment.

En résumé, pour obtenir les asymptotes parallèles à Oy, on cherche les valeurs finies de x qui rendent $f(x)$ infinie. Le signe de $f(x)$ dans le voisinage d'une telle valeur fournit la disposition de la courbe par rapport à l'asymptote correspondante.

De même, pour voir s'il existe une asymptote parallèle à Ox, on cherchera si, x croissant indéfiniment, $f(x)$ tend vers une limite finie y_0. Il est manifeste que la courbe sera alors asymptote à la droite $y = y_0$. Si $f(x)$ n'est pas une expression ration-

nelle, il pourra y avoir lieu de distinguer le cas où x croît indéfiniment par valeurs positives et celui où il croît par valeurs négatives.

2e cas : x et y deviennent simultanément infinis. — 1° *pour que la courbe possède une direction asymptotique de coefficient angulaire c, il faut et il suffit que $\frac{y}{x}$ tende vers le nombre c, quand $|x|$ croît indéfiniment.*

Supposons que la courbe admette la direction asymptotique $y = cx$. Soit M un point de la courbe, de coordonnées x et y. Le coefficient angulaire de OM est $\frac{y}{x}$. Si la droite OM tend vers la droite $y = cx$, c'est que $\frac{y}{x}$ tend vers c. Réciproquement, si $\frac{y}{x}$ tend vers c, OM tend vers $y = cx$, qui nous représente bien une direction asymptotique.

Remarquons que si $\left|\frac{y}{x}\right|$ augmente indéfiniment, nous en concluons que OM tend vers Oy, ou que la courbe admet Oy comme direction asymptotique.

2° *Pour qu'une branche de courbe, admettant la direction asymptotique $y = cx$, possède une asymptote, il faut et il suffit que $y - cx$ tende vers une limite finie d quand $|x|$ croît indéfiniment ; l'asymptote est alors la droite*

$$y = cx + d.$$

En effet, dire que la droite $y - cx - d = 0$ est asymptote, c'est dire que la distance à cette droite d'un point de la courbe tend vers zéro quand $|x|$ croît indéfiniment. Or, cette distance est

$$\frac{f(x) - cx - d}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Il faut donc que le numérateur tende vers zéro, ou encore que $y - cx$ tende vers d.

Réciproquement, si $f(x) - cx$ possède une limite finie d, la

différence $f(x)-cx-d$ tend vers zéro ; il en est donc de même de la distance précédente.

Remarques. — I. D'après l'étude, faite au nº 15, du signe du premier membre de l'équation d'une droite, on déduira la position de la courbe par rapport à l'asymptote du signe de

$$f(x)-cx-d.$$

II. — Si la courbe $y=f(x)$ admet l'asymptote $y=cx+d$, on peut poser

$$f(x)=cx+d+\omega(x),$$

$\omega(x)$ étant une fonction de x qui tend vers zéro lorsque $|x|$ croît indéfiniment. Supposons plus généralement que, pour des valeurs de x de très grand module, on puisse écrire

$$f(x)=\mathrm{P}(x)+\omega(x),$$

$\mathrm{P}(x)$ étant un polynome entier et $\omega(x)$ une fonction tendant vers zéro, comme précédemment. Généralisant la notion d'asymptote, nous dirons que la courbe $y=f(x)$ est asymptote à la courbe $y=\mathrm{P}(x)$; en général, la seconde pourra être rapidement construite et permettra de préciser le tracé des parties éloignées de la première.

Dans de nombreuses applications, il est possible de développer $\omega(x)$ en une série entière en $\frac{1}{x}$, sans terme constant :

$$\omega(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots$$

Exercices. — 1º *Étudier le cas où $f(x)$ est une fraction rationnelle* $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$. Appelant p et q les degrés du numérateur et du dénominateur, justifier les résultats du tableau suivant :

$p<q$	: l'axe $\mathrm{O}x$ est asymptote,	
$p=q$	: une asymptote parallèle à $\mathrm{O}x$,	effectuez
$p=q+1$	: une asymptote rectiligne non parallèle à $\mathrm{O}x$,	la division
$p>q+1$	: pas d'asymptote rectiligne non parallèle à $\mathrm{O}y$.	

Les asymptotes parallèles à $\mathrm{O}y$ sont fournies par les zéros du dénominateur.

2º *Étudier les branches infinies de la courbe*

$$y=\sqrt[3]{x^3+3x+2}-\sqrt{x^2+2x+3}.$$

On cherche un développement de y valable pour les grandes valeurs de $|x|$. Supposons d'abord $x > 0$. Nous avons

$$y = x\left[\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

La parenthèse se ramène, pour $|x|$ très grand, à une série entière en $\frac{1}{x}$, qu'on calcule en appliquant la formule du binome, ce qui donne :

$$\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+\cdots,$$

$$\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\cdots,$$

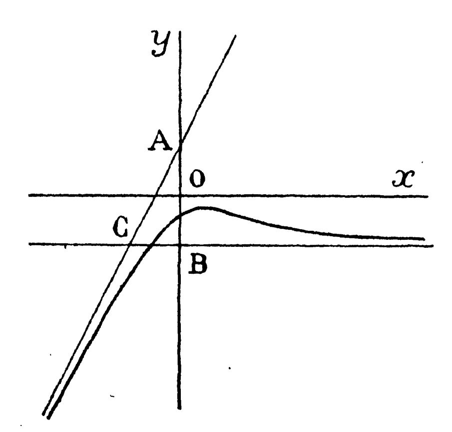
d'où

$$y = -1+\frac{5}{3x^2}+\cdots.$$

La courbe est donc asymptote à la droite $y = -1$. En outre, pour des valeurs très grandes de x, $y+1$ est du signe de $\frac{5}{3x^2}$, c'est-à-dire positif, donc pour ces valeurs, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Si x est négatif, il faut écrire

$$y = x\left[\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$



ce qui donne, pour les premiers termes du développement de y,

$$y = 2x+1+\frac{2}{x}+\cdots$$

Du côté des x négatifs, la courbe est donc asymptote à la droite $y = 2x+1$ et au-dessous. Comme exercice l'élève parachèvera l'étude de la courbe, et montrera, en particulier, qu'elle est tout entière au-dessous de Ox.

II. — Courbes planes définies paramétriquement.

50. Deux équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

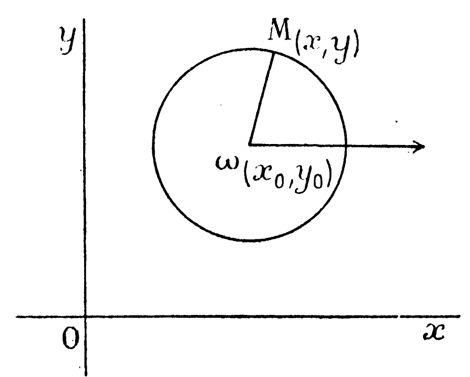
définissent dans le plan xOy une courbe, qui est le lieu des points tels que ces équations admettent au moins une racine commune en t. Donc, *l'équation de cette courbe s'obtient, sous la forme* $F(x, y) = 0$, *par l'élimination du paramètre* t. En posant $t = \varphi(\theta)$, où φ désigne une fonction continue quelconque, on obtient une autre représentation paramétrique de la même courbe; en particulier, un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R pourra se représenter indifféremment sous l'une des deux formes

$$x = x_0 + R\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = y_0 + \frac{2Rt}{1 + t^2};$$

ou

$$x = x_0 + R\cos\theta, \qquad y = y_0 + R\sin\theta.$$

La signification géométrique des paramètres t et θ est donnée, dans cet exemple, par



$$\theta = (\widehat{Ox, \omega M}),$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Lorsque x et y sont des fonctions finies, continues et *périodiques* du paramètre t, le lieu du point (x, y) est une *courbe fermée*.

51. Tangente et normale en un point. — Soit M_0 le point fourni par la valeur t_0 du paramètre; lorsque h tend vers zéro, le

point M, fourni par t_0+h, tend vers M_0. L'équation de la droite MM_0 peut s'écrire

$$\frac{x-f(t_0)}{\frac{1}{h}[f(t_0+h)-f(t_0)]}=\frac{y-g(t_0)}{\frac{1}{h}[g(t_0+h)-g(t_0)]}.$$

Si, pour t_0, f et g ont des dérivées, les dénominateurs de nos rapports, qui représentent les paramètres directeurs de M_0M tendent vers $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$; *si ces deux dérivées ne sont pas simultanément nulles,* nous pouvons dire que M_0M tend vers une position limite. *Il y a* donc alors *une tangente en* M_0, dont les paramètres directeurs sont $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$.

L'équation de cette tangente peut donc s'écrire

$$\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)}.$$

Celle de la *normale* en M_0 sera par suite (en axes rectangulaires)

$$[x-f(t_0)]f'(t_0)+[y-g(t_0)]g'(t_0)=0.$$

Remarque. — Quand on a simultanément

$$f'(t_0)=g'(t_0)=0,$$

il convient, dans chaque cas particulier, d'étudier soigneusement la forme de la courbe au voisinage du point M_0.

Supposons que f et g soient développables suivant les puissances de $t-t_0$, et soit en général

$$\begin{aligned} x-f(t_0)&=a_p(t-t_0)^p+a_{p+1}(t-t_0)^{p+1}+\cdots,\\ y-g(t_0)&=b_p(t-t_0)^p+b_{p+1}(t-t_0)^{p+1}+\cdots, \qquad (p\geqq 2)\end{aligned}$$

l'un au moins des nombres a_p et b_p n'étant pas nul. Lorsque $t-t_0$ tend vers zéro, les quantités $x-f(t_0)$ et $y-g(t_0)$ sont des infiniment petits, dont le rapport tend vers zéro, vers une limite finie ou croît indéfiniment. Il y a donc une tangente en M_0, et elle admet a_p et b_p pour paramètres directeurs.

Cela posé, si pour nouveaux axes nous prenons la tangente et la

normale en M_0, les formules de transformation seront

$$X = \frac{a_p[x - f(t_0)] + b_p[y - g(t_0)]}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2}},$$

$$-Y = \frac{b_p[x - f(t_0)] - a_p[y - g(t_0)]}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2}};$$

le cas le plus fréquent est celui de $p = 2$. Alors, X commence par un terme en $(t - t_0)^2$: il y a un minimum pour $t = t_0$. *La courbe représentative présente alors un rebroussement* [1]. Il en est de même toutes les fois que p est pair, X conservant son signe lorsqu'on franchit t_0. Par contre, si p est impair, X change de signe lorsqu'on dépasse t_0 : il n'y a donc pas rebroussement.

52. Points multiples. — Si par un point il passe deux branches de courbe, on dit que ce point est un point double. De tels points, s'il en existe, s'obtiennent en cherchant les systèmes de nombres distincts t_1 et t_2, tels qu'on ait à la fois

$$(1) \qquad f(t_1) = f(t_2), \qquad g(t_1) = g(t_2).$$

Inversement, soit t_1', t_2' une solution du système (1), telle que l'on ait

$$t_1' - t_2' \neq 0;$$

deux cas peuvent se présenter :

1° Lorsque h tend vers zéro, les deux équations

$$(2) \qquad f(t_1' + h) = f(t), \qquad g(t_1' + h) = g(t)$$

n'ont de racine commune en t, autre que $t_1' + h$, que pour $h = 0$, valeur pour laquelle elles admettent une autre racine commune t_2'. Le point considéré est effectivement un point double [2].

2° Dans les mêmes conditions, si les équations (2) possèdent, pour toutes les valeurs de h de valeur absolue inférieure à un nombre

---

[1] Toutefois, il pourrait arriver ceci : lorsque t franchit en croissant la valeur t_0, le point correspondant rebrousse chemin sur l'arc même qu'il vient de décrire pour les valeurs de t précédant t_0. On a un exemple de cette circonstance en prenant

$$x = \cos t, \qquad y = \cos 2t, \qquad t_0 = 0.$$

[2] Si pour $h = 0$ les équations (2) admettaient $n - 1$ racines communes $t_2, \ldots, t_n$ distinctes de t_1, le point considéré, croisement de n branches de courbe, serait un point multiple d'ordre n.

fixe, une racine t'_2+k, distincte de t'_1+h, c'est que l'arc entourant le point considéré et fourni par les valeurs du paramètre qui avoisinent t'_1 est décrit au moins une autre fois : en effet, cet arc est encore obtenu par les valeurs du paramètre qui avoisinent t'_2 (1).

EXEMPLE. — La courbe

$$x=\sin t, \qquad y=\frac{\sin t}{2+\cos t}$$

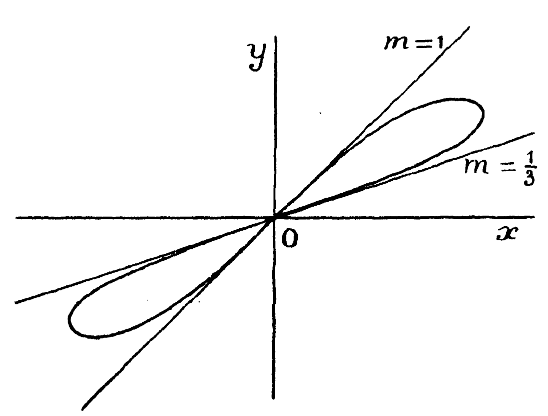
nous offre la réunion des deux circonstances précédentes. Formons sur cet exemple le système (1).

Si nous choisissons arbitrairement t_1, nous pouvons trouver une infinité de valeurs t_2, distinctes de t_1 et vérifiant le système (1). Toutes ces valeurs t_2 sont de la forme $t_1+2n\pi$, en appelant n un entier qui n'est pas nul. Ceci ne nous fournit pas de point double, mais nous montre que, t variant de $-\infty$ à $+\infty$, notre courbe est décrite une infinité de fois ; on la décrit entièrement une fois en faisant varier t dans un intervalle d'amplitude 2π.

Cherchons alors si le système (1) du cas actuel admet des solutions telles que t_1-t_2 ne soit pas multiple de 2π. Les quantités $\sin t_1$ et $\sin t_2$ étant égales, il devient nécessaire que $\cos t_1$ diffère de $\cos t_2$. En vertu de la deuxième équation, il faut donc que l'on ait

$$\sin t_1=\sin t_2=0.$$

On peut prendre $t_1=0$, $t_2=\pi$, et on reconnaît que ces valeurs fournissent bien un point double de la courbe, situé à l'origine.



Comme exercice, nous proposons à l'élève de construire cette courbe, en étudiant les variations simultanées de x et y en fonction de t : nous demandons aussi de déterminer les tangentes en O, en recherchant ce que devient le rapport $\frac{y}{x}$, lorsque t tend, soit vers zéro, soit vers π.

(1) Nous laissons ici de côté le cas où le point fourni par les valeurs t'_1 et t'_2 serait un point limite d'une suite infinie de points doubles.

53. Branches infinies. — Elles proviennent des valeurs, finies ou infinies, de t, pour lesquelles l'une au moins des deux coordonnées devient infinie. Une seule des deux coordonnées peut devenir infinie, l'autre tendant vers une limite finie ; on obtient alors une asymptote parallèle à l'un des axes. Sinon, on forme le rapport $\frac{y}{x}$: s'il a une limite c, la branche considérée admet une direction asymptotique de coefficient angulaire c. On forme alors $y - cx$: suivant qu'il possède ou non une limite, il y a ou non une asymptote correspondante. Lorsque cette limite existe et a pour valeur d, l'asymptote est

$$y - cx - d = 0 ;$$

le signe de la fonction

$$g(t) - cf(t) - d$$

fait connaître la disposition de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple. — Appliquer cette méthode à la courbe

$$x = \frac{t^3 - t^2 + 2}{t}, \qquad y = \frac{t^3 - 1}{t + 1}.$$

Lorsque t tend vers -1, x tend vers zéro et $|y|$ croît indéfiniment. La courbe est donc asymptote à l'axe Oy. La valeur $t = 0$ fournit de même l'asymptote $y = -1$. Enfin, lorsque $|t|$ croît indéfiniment, il en est de même de $|x|$ et $|y|$. Nous avons

$$\frac{y}{x} = \frac{t^3 - 1}{t^3 - t^2 + 2} \cdot \frac{t}{t + 1}.$$

Cette quantité tend vers 1. Formons

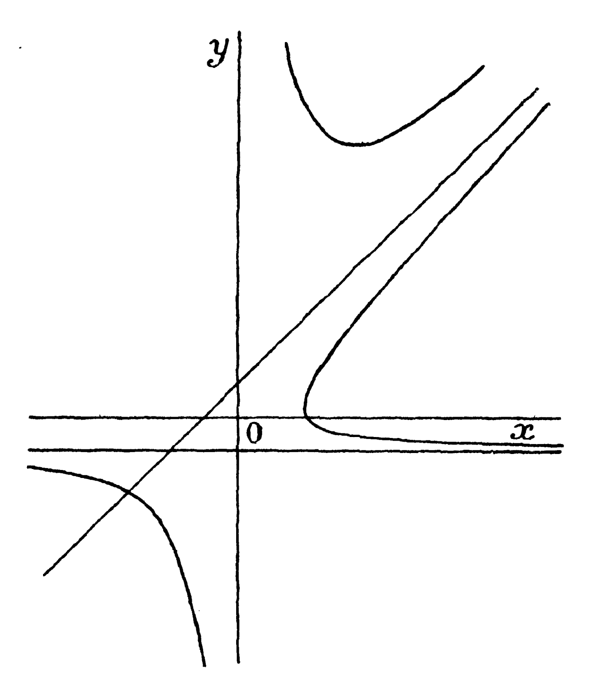
$$y - x = \frac{(t^3 - 1)t - (t^3 - t^2 + 2)(t + 1)}{t(t + 1)} = \frac{t^2 - 3t - 2}{t(t + 1)} ;$$

le second membre tend aussi vers 1. Donc nous avons l'asymptote

$$y = x + 1.$$

A titre d'exercice, l'élève construira la courbe, qui a la forme indi-

quée par la figure ci-dessous. Il montrera que le point à l'infini sur l'asymptote $y = x + 1$ est un point de rebroussement.



III. — Courbes planes, en coordonnées polaires.

54. Lorsqu'une courbe est définie par son équation en coordonnées polaires

$$\rho = f(\omega),$$

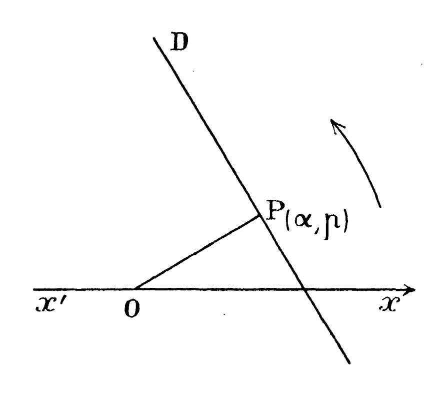
on en possède immédiatement une représentation paramétrique

$$x = f(\omega)\cos\omega, \qquad y = f(\omega)\sin\omega.$$

On pourrait donc se dispenser d'une étude nouvelle ; cependant, nous présenterons, relativement aux propriétés et à la construction de ces courbes, quelques résultats très importants pour les applications.

Pour diverses questions, il est utile de savoir écrire ***l'équation***

polaire d'une droite. Cette équation est de la forme $\omega = c^{te}$ lorsque la droite passe par le pôle. Sinon, abaissons du pôle la perpendiculaire OP sur la droite et appelons (α, p) un système de coordonnées polaires du point P. L'élève établira que l'équation de la droite est



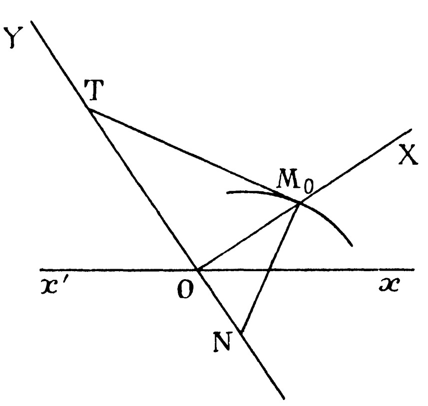
$$\rho \cos(\omega - \alpha) = p.$$

Inversement, nous lui proposons de montrer que toute équation de la forme

$$\frac{1}{\rho} = A \cos \omega + B \sin \omega \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

représente une droite qui ne passe pas par le point O.

55. Tangente à une courbe : sous-tangente et sous-normale polaires. — Soit la courbe



$$\rho = f(\omega),$$

et le point M_0 de cette courbe dont les coordonnées polaires sont (ω_0, ρ_0). Considérons l'axe OX tel que

$$(\widehat{Ox, OX}) = \omega_0.$$

Menons un deuxième axe OY tel qu'on ait

$$(\widehat{OX, OY}) = + \frac{\pi}{2};$$

cet axe rencontre la tangente et la normale en M_0 en des points T et N. Par définition, on appelle *sous-tangente* et *sous-normale* polaires les ordonnées des points T et N dans le système d'axes OX, OY :

$$\overline{OT} = \textit{sous-tangente polaire}, \qquad \overline{ON} = \textit{sous-normale polaire}.$$

Pour les obtenir, cherchons d'abord l'équation de la tangente en M_0. Laissons au lecteur le soin d'établir que toute droite issue de M_0 a une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cos(\omega - \omega_0) + \lambda \sin(\omega - \omega_0).$$

Si nous remplaçons dans cette équation ρ par $f(\omega)$, nous obtiendrons l'équation donnant les angles polaires qui correspondent aux points de rencontre de la droite et de la courbe. Celle-ci doit admettre ω_0 pour racine double. Or pour $\omega = \omega_0$, la dérivée du premier membre se réduit à $\left[\frac{d}{d\omega}\frac{1}{f(\omega)}\right]_{\omega=\omega_0}$; celle du second à λ. Donc, nous avons

$$\lambda = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\omega=\omega_0} = -\frac{\rho'_0}{\rho_0^2}.$$

Pour avoir $\overline{OT}$, faisons alors, dans l'équation (1),

$$\omega - \omega_0 = \frac{\pi}{2};$$

il vient

$$\frac{1}{\overline{OT}} = -\frac{\rho'_0}{\rho_0^2},$$

et, par suite,

$$\overline{OT} = -\frac{\rho_0^2}{\rho'_0}.$$

On en déduit aisément

$$\overline{ON} = \rho'_0.$$

Remarque. — Si ρ_0 est nul, la courbe passe par le pôle. Il résulte de la définition de la tangente que la tangente au point O à l'arc de courbe fourni par les valeurs de ω voisines de ω_0 est le rayon vecteur $\omega = \omega_0$.

56. Directions asymptotiques et asymptotes rectilignes. — Pour que le rayon vecteur $\omega = \omega_0$ fournisse une direction asymptotique de la courbe

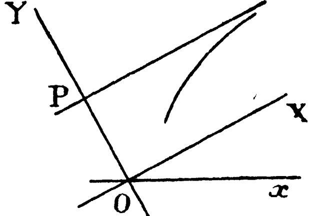
$$\rho = f(\omega),$$

il faut et il suffit que $|\rho|$ croisse indéfiniment lorsque ω tend vers ω_0. Ceci s'aperçoit immédiatement en se reportant à la définition d'une direction asymptotique (n° 49).

Supposons cette condition remplie : s'il existe une asymptote parallèle à la droite $\omega = \omega_0$, nous la déterminerons en faisant connaître la valeur algébrique de $\overline{OP}$, comptée sur l'axe $\omega = \omega_0 + \frac{\pi}{2}$, P désignant le point où l'asymptote rencontre cet axe. Appelons OX l'axe fourni par $\omega = \omega_0$, OY celui qui correspond à

$$\omega = \omega_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Dans le système d'axes OX, OY, les coordonnées cartésiennes d'un point de notre courbe sont



$$X = f(\omega) \cos(\omega - \omega_0),$$
$$Y = f(\omega) \sin(\omega - \omega_0).$$

Pour savoir si la courbe admet une asymptote parallèle à OX, il suffit de chercher si Y possède une limite quand $|X|$ croît indéfiniment, c'est-à-dire lorsque ω tend vers ω_0. Ainsi, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Pour qu'il y ait une asymptote parallèle à $\omega = \omega_0$, il faut et il suffit que le produit

$$\rho \sin(\omega - \omega_0)$$

tende vers une limite quand ω tend vers ω_0. Si elle existe, elle donne la valeur de $\overline{OP}$ et, par suite, détermine l'asymptote.

57. Généralités sur la construction des courbes en coordonnées polaires. — Tout se ramène à l'étude des variations de la fonction

$$\rho = f(\omega).$$

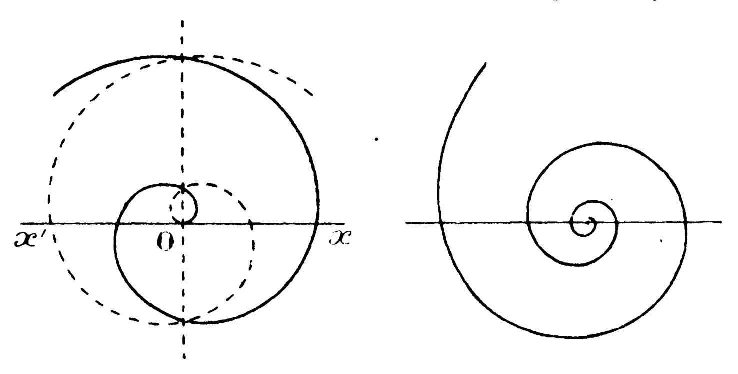
Si elle n'est pas périodique, il faut en général faire varier ω de $-\infty$ à $+\infty$: la croissance indéfinie de l'angle polaire donne

alors naissance à des courbes d'aspect nouveau pour nous. Les plus remarquables sont les spirales, qui affectent des formes extrêmement variées : en s'enroulant, elles peuvent s'éloigner indéfiniment du pôle.

Exemples : la *spirale d'Archimède*, $\rho = a\omega + b$;
la *spirale logarithmique*, $\rho = ae^{m\omega}$ (pour les valeurs de ω qui sont du signe de m).

Elles peuvent aussi se rapprocher indéfiniment du pôle.

Exemple : la *spirale logarithmique*, pour les valeurs de ω du signe de $-m$. On dit alors que le pôle est un point asymptote.



Spirale d'Archimède. Spirale logarithmique.

Au lieu de s'enrouler autour d'un point, la spirale pourra, dans certains cas, s'enrouler autour d'un cercle de centre O ou, plus généralement, autour d'une courbe fermée (extérieurement ou intérieurement).

Exemples : $\rho = a - \dfrac{b}{\omega^n}$, $\rho = 1 + \cos\omega + e^{-\omega}$, etc...

Nous conseillons à l'élève d'étudier avec soin la forme de la courbe dans chacun de ces exemples.

58. Lorsque ρ est une fonction périodique de ω, appelons α sa plus petite période ; en faisant varier ω entre deux valeurs qui diffèrent de α, nous obtenons un arc qui, en subissant autour de O toutes les rotations multiples de α, engendre la totalité de la courbe. Lorsque α est incommensurable avec 2π, il est indispensable d'envisager toutes ces

rotations : la courbe

$$\rho = \cos(\omega\sqrt{2}),$$

constituée par une rosace d'une infinité de branches, nous offre un exemple de cette particularité.

Par contre, lorsque α est commensurable avec 2π, un nombre fini de ces rotations suffira pour donner toute la courbe. Ainsi, supposons que l'on ait $\alpha = 2\pi$ et en outre que la fonction $f(\omega)$ satisfasse à la relation

$$f(\omega + \pi) = -f(\omega);$$

dans ces conditions, lorsqu'on augmente ω de π, ρ se change en $-\rho$; nous obtenons un second système de coordonnées polaires du même point. C'est dire qu'il suffit de faire varier ω dans un intervalle d'amplitude π.

Enfin, ici, comme dans tout problème de construction de courbes, on pourra profiter de considérations de symétrie pour obtenir des simplifications. Cela permettra, le cas échéant, de restreindre encore l'intervalle de variation de ω. Nous ne pénétrons pas davantage dans le détail, considérant que nous nous écarterions de notre but en prodiguant à l'élève des procédés qui s'oublient assez rapidement, mais qu'on a vite fait de trouver, par un raisonnement simple, dans chaque cas particulier.

IV. — Courbes de l'espace définies paramétriquement.

59. Trois équations telles que

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

définissent une courbe de l'espace : *pour que cette courbe soit plane*, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer des constantes A, B, C, D telles qu'on ait entre les trois fonctions f, g, h l'identité

$$Af(t) + Bg(t) + Ch(t) + D = 0;$$

s'il est impossible de réaliser une telle identité, la courbe est *gauche*.

60. Tangente, plan normal. — En raisonnant comme en géométrie plane, on établit que si au point M_0 les trois dérivées $f'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$ ne sont pas toutes nulles, il y a en ce point

une tangente, de paramètres directeurs

$$f'(t_0), \qquad g'(t_0), \qquad h'(t_0).$$

Les équations de cette droite peuvent s'écrire en général

$$\frac{x - f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y - g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z - h(t_0)}{h'(t_0)}.$$

Par suite, le plan normal en M_0 a pour équation (axes rectangulaires)

$$[x - f(t_0)]f'(t_0) + [y - g(t_0)]g'(t_0) + [z - h(t_0)]h'(t_0) = 0.$$

Lorsque les trois dérivées de x, y, z par rapport à t s'annulent au point M_0, il faut prendre les mêmes précautions qu'en géométrie plane. Supposons que f, g, h soient développables par la formule de Taylor et appelons p le plus petit entier tel que leurs dérivées d'ordre p ne s'annulent pas simultanément pour $t = t_0$. On démontre, comme en géométrie plane, que la courbe admet encore au point M_0 une tangente ayant pour paramètres directeurs

$$f^{(p)}(t_0), \qquad g^{(p)}(t_0), \qquad h^{(p)}(t_0);$$

le point M_0 est ou non un point de rebroussement suivant que p est pair ou impair.

61. Plan osculateur. — Soit un point M_0, pour lequel $f'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$ ne s'annulent pas simultanément. Le plan déterminé par la tangente M_0T_0 en M_0 et un point M de la courbe infiniment voisin de M_0 possède en général une position limite quand M tend vers M_0 : elle constitue, par définition, le *plan osculateur* en M_0.

Pour en établir l'existence, supposons que f, g, h admettent par rapport à t des dérivées secondes continues pour la valeur t_0. Le plan de la droite M_0T_0 et du point M a pour équation

$$(1) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad [x_0 = f(t_0), \text{ etc}\ldots]$$

A, B, C étant liés par les deux relations

$$(2) \qquad Af'(t_0) + Bg'(t_0) + Ch'(t_0) = 0,$$

$$(3) \quad A[f(t) - f(t_0)] + B[g(t) - g(t_0)] + C[h(t) - h(t_0)] = 0,$$

qui expriment que la direction M_0T_0 et le point M appartiennent

au plan. Appliquons aux fonctions f, g, h la formule de Taylor. Il vient

$$(3')\quad \begin{cases} f(t)-f(t_0)=(t-t_0)f'(t_0)+\dfrac{(t-t_0)^2}{2}f''(t_1), \\ g(t)-g(t_0)=(t-t_0)g'(t_0)+\dfrac{(t-t_0)^2}{2}g''(t_2), \\ h(t)-h(t_0)=(t-t_0)h'(t_0)+\dfrac{(t-t_0)^2}{2}h''(t_3), \end{cases}$$

t_1, t_2, t_3 désignant des nombres compris entre t_0 et t. En portant ces valeurs dans (3) et en tenant compte de (2), on voit que les coefficients A, B, C de notre plan vérifient la relation

$$(3'')\qquad Af''(t_1)+Bg''(t_2)+Ch''(t_3)=0.$$

En définitive, on peut considérer le plan de M_0T_0 et de M comme déterminé par deux vecteurs d'origine M_0 et de composantes respectives

$$\begin{matrix} f'(t_0), & g'(t_0), & h'(t_0), \\ f''(t_1), & g''(t_2), & h''(t_3); \end{matrix}$$

quand M tend vers M_0, ce second vecteur tend, en vertu de la continuité des dérivées secondes, vers un vecteur $M_0\Gamma_0$ de composantes

$$f''(t_0), \qquad g''(t_0), \qquad h''(t_0).$$

Sous les conditions indiquées, nous trouvons donc bien une position limite. C'est le plan déterminé par le vecteur $M_0\Gamma_0$ et le vecteur M_0V_0 ayant pour composantes

$$f'(t_0), \qquad g'(t_0), \qquad h'(t_0).$$

Ceci implique toutefois une nouvelle condition : c'est que ces vecteurs aient des lignes d'action différentes ; en supposant qu'il en soit ainsi, l'existence du plan osculateur est établie en toute rigueur. Son équation est

$$(x-x_0)(y'_0z''_0-z'_0y''_0)+(y-y_0)(z'_0x''_0-x'_0z''_0) \\ +(z-z_0)(x'_0y''-y'_0x''_0)=0,$$

en appelant x', y', z', x'', y'', z'' les dérivées premières et secondes de x, y, z par rapport à t.

Lorsque M_0V_0 et $M_0\Gamma_0$ ont leurs lignes d'action confondues, les trois coefficients

$$y'_0z''_0 - z'_0y''_0, \qquad z'_0x''_0 - x'_0z''_0, \qquad x'_0y''_0 - y'_0x''_0$$

de l'équation précédente s'évanouissent. L'existence d'une position limite du plan M_0T_0M en de tels points dépend des propriétés des dérivées d'ordre supérieur.

62. Remarque. — L'équation aux t des points de rencontre du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

avec la courbe est

$$(4) \qquad Af(t) + Bg(t) + Ch(t) + D = 0.$$

Pour que ce plan soit osculateur en M_0, il faut et il suffit, en général, qu'il contienne les deux vecteurs M_0V_0 et $M_0\Gamma_0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\begin{aligned} Af(t_0) + Bg(t_0) + Ch(t_0) + D &= 0, \\ Af'(t_0) + Bg'(t_0) + Ch'(t_0) \quad &= 0, \\ Af''(t_0) + Bg''(t_0) + Ch''(t_0) \quad &= 0. \end{aligned}$$

Or ce sont là les conditions pour que t_0 soit une racine triple de l'équation (4). Dire qu'un plan est osculateur à la courbe revient donc à dire qu'il la coupe en trois points confondus [1].

Application. — *Écrire l'équation générale des plans osculateurs à la courbe*

$$x = \frac{1}{t-\alpha}, \qquad y = \frac{1}{t-\beta}, \qquad z = \frac{1}{t-\gamma}.$$

Soit un plan quelconque

$$ux + vy + wz + h = 0;$$

l'équation aux t des points où il rencontre la courbe est

$$\frac{u}{t-\alpha} + \frac{v}{t-\beta} + \frac{w}{t-\gamma} + h = 0.$$

---

[1] Toutefois, en se reportant à la définition du plan osculateur, on voit que la réciproque cesse d'être vraie pour les points M_0 où les vecteurs M_0V_0 et $M_0\Gamma_0$ ont la même direction.

Écrivons que cette équation admet une racine triple λ, c'est-à-dire qu'on a une identité de la forme

$$\frac{u}{t-\alpha}+\frac{v}{t-\beta}+\frac{w}{t-\gamma}+h\equiv\frac{h(t-\lambda)^3}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)};$$

on en tire, en identifiant,

$$u=\frac{h(\alpha-\lambda)^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\qquad v=\frac{h(\beta-\lambda)^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},$$
$$w=\frac{h(\gamma-\lambda)^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Donc, le plan osculateur au point de la courbe de paramètre λ a pour équation

$$\frac{(\alpha-\lambda)^3x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-\lambda)^3y}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{(\gamma-\lambda)^3z}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+1=0.$$

63. Signalons une propriété qui caractérise le plan osculateur et qui est commode pour quelques raisonnements. Elle s'énonce par le théorème suivant :

Théorème. — *Le plan osculateur est la limite du plan mené par* M_0T_0 *parallèlement à la tangente* MT *en un point* M *de la courbe infiniment voisin de* M_0 (mêmes hypothèses qu'au n° **61**).

En effet, un tel plan a pour équation

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

A, B, C étant liés par les relations

$$Af'(t_0)+Bg'(t_0)+Ch'(t_0)=0,$$
$$Af'(t)+Bg'(t)+Ch'(t)=0.$$

La formule de Taylor nous donne

$$f'(t)=f'(t_0)+(t-t_0)f''(\tau_1),$$
$$g'(t)=g'(t_0)+(t-t_0)g''(\tau_2),$$
$$h'(t)=h'(t_0)+(t-t_0)h''(\tau_3),$$

τ_1, τ_2, τ_3 désignant des nombres compris entre t_0 et t. Nous aurons donc

$$Af''(\tau_1)+Bg''(\tau_2)+Ch''(\tau_3)=0.$$

Le plan considéré est donc celui du vecteur M_0V_0 et d'un vecteur de composantes

$$f''(\tau_1), \qquad g''(\tau_2), \qquad h''(\tau_3),$$

qui, en vertu de la continuité des dérivées secondes, tend vers le vecteur $M_0\Gamma_0$. En supposant la direction de ce dernier distincte de celle de M_0V_0, le théorème annoncé est donc établi.

64. Normales. — En chaque point, une courbe de l'espace admet une infinité de normales ; celle qui est contenue dans le plan osculateur s'appelle la *normale principale*, celle qui est perpendiculaire à ce plan s'appelle la *binormale*. Ces appellations tirent leur origine du cas où l'on considère une courbe plane : en chaque point de celle-ci, le plan osculateur se confond avec le plan de la courbe elle-même ; il est alors naturel d'attribuer plus d'importance à la normale à la courbe qui se trouve dans son plan et de la dénommer principale. Celle qui est perpendiculaire au plan est normale à la fois à la courbe et à son plan, ce qui explique alors la désignation de binormale.

65. Disposition de la courbe par rapport à l'un de ses plans osculateurs. — Nous prendrons pour origine le point particulier envisagé sur la courbe et pour plan xOy le plan osculateur en ce point, l'axe Ox étant précisément la tangente : Oy sera par suite la normale principale et Oz la binormale. Bornons-nous à traiter le cas où x, y, z sont développables, par rapport au paramètre t, en séries de Mac-Laurin, valables dans le voisinage de l'origine, que nous supposerons obtenue pour $t = 0$. Soient

$$\begin{aligned} x &= a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots, \\ y &= b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots, \\ z &= c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Du fait que Ox est la tangente en O, il résulte immédiatement que l'on a

$$b_1 = c_1 = 0.$$

De même, xOy étant le plan osculateur, on démontre aisément que l'on doit avoir $c_2 = 0$. En définitive le développement de z est de la forme

$$z = c_3t^3 + \ldots.$$

En général, c_3 sera différent de zéro : z changeant de signe en même

temps que t, la courbe traverse son plan osculateur. Il en est ainsi à chaque fois que z commence par un terme en t dont l'exposant est impair. Si, au contraire, cet exposant est pair, z possède un signe constant dans le voisinage de l'origine : la courbe ne traverse pas son plan osculateur.

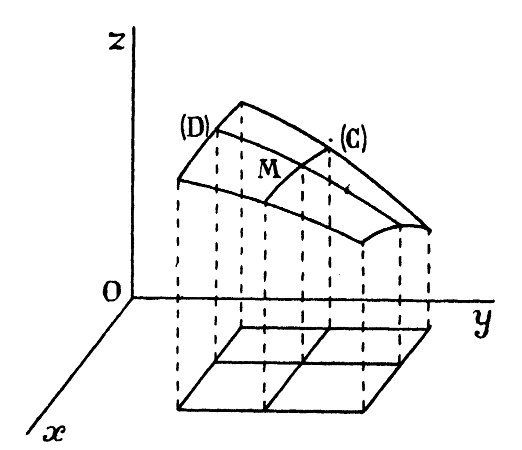
Remarque. — La projection de la courbe sur le plan des yz, définie par les équations

$$y = b_2t^2 + b_3t^3 + \dots, \qquad z = c_3t^3 + \dots,$$

possède en général ($b_2 \neq 0$) un point de rebroussement ; c'est là la circonstance qui se produit le plus souvent lorsqu'on cherche la projection orthogonale d'un arc de courbe sur un plan perpendiculaire à l'une de ses tangentes.

V. — Surfaces définies par une équation $z = f(x, y)$.

66. Rappel de propriétés des fonctions de deux variables. — La théorie des fonctions de deux et de plusieurs variables joue, dans les questions que nous allons maintenant étudier, un rôle prépondérant. Sans la reprendre entièrement, nous en rappellerons quelques points importants en nous plaçant dans le cas de deux variables et en nous attachant à interpréter géométriquement les résultats énoncés. Soit $f(x, y)$ la fonction considérée ; nous serons amenés à envisager la surface



$$z = f(x, y).$$

Soit M un point de cette surface ; sur celle-ci le lieu des points qui ont même ordonnée que M est une

courbe (C), le lieu des points qui ont même abscisse que M est une autre courbe (D); ces courbes se croisent en M. Les tangentes en ce point à chacune d'elles ont respectivement pour paramètres directeurs

$$\begin{matrix} 1, & 0, & f'_x, \\ 0, & 1, & f'_y; \end{matrix}$$

l'élève, après avoir relu la définition des dérivées partielles premières de $f(x, y)$ pour un système déterminé de valeurs de x et y, en comprend donc maintenant la signification géométrique. Nous le prions instamment de revoir, dans son cours d'algèbre, la définition des dérivées partielles d'ordre supérieur, ainsi que le *théorème de l'indépendance de l'ordre des dérivations*, et les notations qu'il permet d'adopter pour représenter une dérivée d'ordre quelconque; toutefois, en géométrie, on pose souvent, pour abréger,

$$p = f'_x, \qquad q = f'_y, \qquad r = f''_{x^2}, \qquad s = f''_{xy}, \qquad t = f''_{y^2}.$$

Nous allons maintenant revenir sur la notion de *fonction composée*, en en rattachant l'origine à la considération d'une courbe tracée sur la surface. Pour définir une telle courbe, il suffit de donner une représentation paramétrique de sa projection sur le plan xOy, soit

$$x = A(t), \qquad y = B(t).$$

La cote du point de cette courbe qui correspond au paramètre t sera alors la fonction composée de t

$$z = f[A(t), B(t)].$$

Pour déterminer la tangente en un point d'une telle courbe, il est indispensable de savoir calculer la dérivée de cette fonction composée. Tous les cours d'algèbre fournissent la manière d'effectuer cette dérivation : il est cependant utile pour l'élève de reprendre le raisonnement qui conduit au résultat, en en suivant pas à pas l'interprétation géométrique.

Nos hypothèses sont les suivantes :

1° *Les fonctions* $A(t)$ *et* $B(t)$ *possèdent des dérivées* $A'(t)$ *et* $B'(t)$;

2° *La fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles premières continues.*

Dans ces conditions, nous allons montrer que *notre fonction composée admet une dérivée,* donnée par

$$\frac{dz}{dt} = f'_x[A(t), B(t)] \,.\, A'(t) + f'_y[A(t), B(t)] \,.\, B'(t).$$

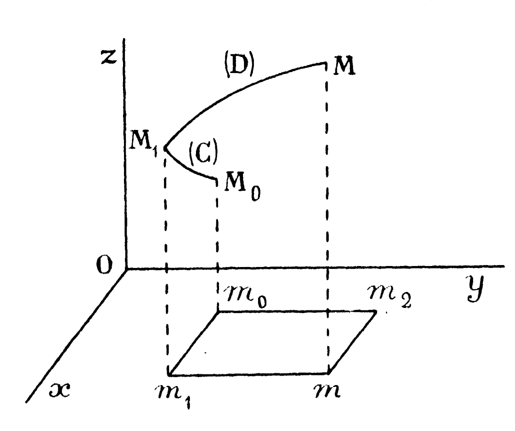
En effet, donnons à t une valeur t_0; x acquiert alors la valeur x_0, y la valeur y_0; il en résulte pour z une valeur z_0 donnée par

$$z_0 = f(x_0, y_0).$$

Nous appelons M_0 le point de la surface admettant pour coordonnées x_0, y_0, z_0. Donnons à t un accroissement θ : il en résulte pour x un accroissement ξ et pour y un accroissement η, d'où pour z un accroissement ζ, de sorte que nous avons

$$\zeta = f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0).$$

Soit M le point de la surface qui a pour coordonnées $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$. Au lieu d'aller directement de M_0 en M, sur la surface, en suivant la courbe considérée, nous pouvons d'abord passer du point M_0 au point M_1 (dont la projection m_1 sur xOy a pour coordonnées $x_0 + \xi$, y_0) en suivant une courbe (C) d'ordonnée constante, puis du point M_1 au point M en suivant une courbe (D), d'abscisse constante. Cela nous amène à écrire ζ sous la forme



$$\zeta = f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0 + \xi, y_0) \\ + f(x_0 + \xi, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Dans le second membre, la première ligne représente la différence de cote de deux points de la courbe (D); écrivant qu'il existe sur l'arc M_1M de cette courbe un point où la tangente est parallèle à la corde M_1M, nous obtenons

$$f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0 + \xi, y_0) = \eta f'_y(x_0 + \xi, y_0 + \eta_1),$$

η_1 représentant un nombre compris entre 0 et η. De même, la seconde

ligne représente la différence de cote de deux points de la courbe (C); en opérant d'une manière analogue, nous obtenons

$$f(x_0+\xi, y_0) - f(x_0, y_0) = \xi f'_x(x_0+\xi_1, y_0),$$

ξ_1 étant compris entre 0 et ξ. En définitive, nous avons donc

$$\frac{\zeta}{\theta} = \frac{\xi}{\theta} f'_x(x_0+\xi_1, y_0) + \frac{\eta}{\theta} f'_y(x_0+\xi, y_0+\eta_1);$$

quand θ tend vers zéro, $\frac{\xi}{\theta}$ et $\frac{\eta}{\theta}$ possèdent, par hypothèse, des limites $A'(t_0)$ et $B'(t_0)$: en outre ξ, η, ξ_1, η_1 tendent vers zéro. Donc $\frac{\zeta}{\theta}$ possède une limite; par suite, z a bien, par rapport à t, pour la valeur t_0, une dérivée égale à

$$A'(t_0)f'_x(x_0, y_0) + B'(t_0)f'_y(x_0, y_0). \qquad \text{(C. q. f. d.)}$$

67. Plan tangent en un point. Théorème. — *Si pour x_0, y_0 la fonction $f(x, y)$ possède des dérivées premières continues, les tangentes en M_0 à toutes les courbes qui passent en ce point sur la surface*

$$z = f(x, y)$$

sont contenues dans un même plan, qu'on appelle le plan tangent en M_0.

En effet, d'après ce qui précède, les paramètres directeurs de la tangente en M_0 à l'une de ces courbes sont les valeurs $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ que prennent pour $t = t_0$ les dérivées des trois fonctions x, y, z de la variable t [1]. Or nous venons de voir qu'elles sont liées par la relation

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = f'_x(x_0, y_0)\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + f'_y(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dt}\right)_0.$$

Cette égalité exprime l'orthogonalité d'une quelconque de nos tangentes, à la direction du vecteur de projections [2]

$$f'_x(x_0, y_0), \qquad f'_y(x_0, y_0), \qquad -1,$$

---

(1) Nous supposons, ce qui est permis, que la représentation paramétrique de chaque courbe issue de M_0 sur la surface soit telle que la même valeur t_0 du paramètre fournisse, sur ces différentes courbes, le point M_0.

(2) Ce recours aux projections (et non aux composantes) a pour intérêt d'être indifféremment valable en axes rectangulaires et en axes obliques (cf. n° 5 bis).

ou, en abrégé,

$$p_0, \quad q_0, \quad -1.$$

Le lieu des tangentes considérées est donc bien le plan

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0).$$

Non seulement nous avons établi l'existence du plan tangent, mais encore nous avons là son équation.

Normale. — Il résulte de ce qui précède que la *normale* en M à la surface est définie par les équations, en axes rectangulaires,

$$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{q_0} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

67bis. Dérivée dans une direction. — Deux axes rectangulaires Ox, Oy étant donnés, on peut dire que $f(x, y)$ est une *fonction du point* $m(x, y)$. Il arrive qu'une fonction de point soit donnée sans recours aux axes ; ex. : la densité superficielle d'une plaque matérielle en chaque point, la somme des distances d'un point m à plusieurs points donnés du plan, etc...

Soit $m_0(x_0, y_0)$ un point particulier du plan. Sur une demi-droite Δ_0, de cosinus directeurs α, β, issue de m_0, $f(x, y)$ se réduit à une fonction composée $f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$, dont la dérivée par rapport à la distance $t = m_0m$, pour $t = 0$, a pour valeur (nº 66) :

$$(1) \qquad \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0) = \lim \frac{f_m - f_{m0}}{mm_0}.$$

Adoptant une définition qui parle d'elle-même, nous dirons que (1) est la *dérivée* de f, *au point* m_0, *dans la direction* Δ. L'intérêt de cette notion est d'être indépendante des axes.

Or (1) est la projection sur Δ du vecteur (f'_x, f'_y), dont la signification est donc aussi indépendante des axes : c'est le *gradient* de $f(x, y)$. Supposons que cette fonction donne la cote d'un certain terrain projeté (en réduction) sur la carte d'État-Major. La demi-droite issue de l'origine m_0 du gradient et passant par son extrémité fournit la dérivée maximum de la cote en m_0 : elle donne donc la direction de plus grande pente, dans le sens des cotes croissantes. Cette direction est aussi celle de la normale aux lignes de niveau.

Là où le terrain présente un *sommet* ou un *fond* (maximum ou minimum de la cote), la dérivée est nulle dans toute direction, et il en est de même du gradient. Mais cette éventualité se présente également aux *cols* ; exemple : l'origine pour la surface $z = x^2 - y^2$.

VI. — Courbes planes définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$.

68. Au lieu de donner, dès l'abord, une théorie rigoureuse mais difficile à assimiler, nous ferons appel à l'intuition géométrique. Une courbe (C), définie par une équation

$$f(x, y) = 0,$$

peut être regardée comme la trace sur le plan xOy de la surface (S) qui a pour équation

$$z = f(x, y).$$

La *tangente en un point* $M_0(x_0, y_0)$ de la courbe (C) est l'intersection du plan xOy et du plan tangent au point $(x_0, y_0, 0)$ de la surface (S). Or ce plan a pour équation

$$z = (x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0}.$$

La tangente cherchée est donc représentée par

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} = 0.$$

Cette méthode ne donne le résultat que si le plan tangent à la surface au point $(x_0, y_0, 0)$ est distinct du plan xOy, c'est-à-dire si les deux dérivées partielles de f ne sont pas nulles simultanément au point (x_0, y_0) ; cette circonstance se produirait évidemment si la surface (S) coupait le plan xOy suivant une courbe présentant en M_0 un point double[1]. Le plan tangent à la surface en M_0 coïnciderait bien avec le plan xOy, puisqu'il aurait en commun avec lui deux droites : les deux tangentes en M_0. Mais il est évident que la coïncidence avec xOy du plan tangent en M_0 n'entraîne pas que ce point soit double : par exemple, si toute section de la surface par un plan, mené par M_0 parallèlement à Oz, est une courbe qui, dans le voisinage de M_0, tourne sa concavité vers les z positifs, il est clair que M_0 sera un point isolé de l'intersection de la surface (S) et du plan xOy.

Ces indications suffiront à l'élève pour comprendre le sens des

---

[1] C'est-à-dire dont deux arcs se croisent en M_0.

énoncés suivants, que nous le prions pour le moment d'admettre, et qui constituent la partie du théorème des fonctions implicites relative au cas d'une seule variable indépendante :

1° Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point tel que l'on ait

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

avec

$$f'_{y_0} \neq 0. \text{ [1]}$$

Il existe une seule fonction continue y, de la variable x, tendant vers y_0 quand x tend vers x_0 ; il en résulte qu'au point M_0 il passe une branche unique de la courbe ; elle admet en M_0 une tangente qui a pour équation

$$(1) \qquad (x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} = 0.$$

2° Si f'_{y_0} est nul sans que f'_{x_0} le soit, en permutant le rôle des variables et appliquant la première partie de l'énoncé, on voit qu'il existe une fonction unique x, de la variable y, tendant vers x_0 quand y tend vers y_0. Au point M_0, il passe encore une branche unique de la courbe, et cette branche admet en M_0 une tangente parallèle à Oy.

3° Si f'_{x_0} et f'_{y_0} sont tous les deux nuls, on dit que M_0 est un *point singulier* : effectivement, il s'agit bien là d'une propriété de M_0 indépendante des axes Ox et Oy dans le plan de la courbe, puisque les conditions

$$f'_{x_0} = f'_{y_0} = 0$$

impliquent la coïncidence du plan tangent en M_0 à la surface (S) avec le plan de la courbe. Bornons-nous à envisager le cas où le point M_0 est un point singulier [2] pour lequel on a

$$f''_{y_0^2} \neq 0.$$

La forme de la courbe dans le voisinage du point M_0 dépend alors du signe de la quantité

$$\delta_0 = f''_{x_0^2} f''_{y_0^2} - (f''_{x_0 y_0})^2.$$

---

(1) L'hypothèse $f'_{y_0} \neq 0$ signifie qu'au point M_0 le plan tangent à la surface (S) n'est pas parallèle à Oy.

(2) Nous supposons en outre que la distance de M_0 à d'autres points singuliers ne descende pas au-dessous d'une certaine limite inférieure.

Si δ_0 est positif, on établit que M_0 est un point isolé de la courbe.

Si δ_0 est négatif, on démontre qu'il passe en M_0 deux branches distinctes de la courbe (C): on obtient en M_0 un véritable point double, et les coefficients angulaires des tangentes en ce point sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad m^2 f''_{y_0^2} + 2m f''_{x_0 y_0} + f''_{x_0^2} = 0,$$

dont le discriminant est précisément δ_0. Cela revient à dire que l'ensemble de ces tangentes est représenté par l'équation

$$(3) \qquad (x - x_0)^2 f''_{x_0^2} + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{x_0 y_0} + (y - y_0)^2 f''_{y_0^2} = 0.$$

Enfin, si δ_0 est nul, la courbe possède en général un point de rebroussement en M_0, la tangente en ce point ayant pour coefficient angulaire la racine double de l'équation (2); mais ce cas n'est pas le seul possible: il peut aussi arriver que la courbe se compose, dans le voisinage de M_0, de deux arcs simples tangents à la droite double que représente alors l'équation (3). Enfin, il peut se faire que M_0 soit un point isolé.

Tous ces énoncés supposent la continuité des dérivées qu'ils mettent en jeu, au voisinage du point M_0.

Remarque. — La fonction f étant nulle en M_0, supposons d'abord que ses dérivées premières ne s'y annulent pas toutes deux. Coupons la courbe par une droite, de paramètres directeurs a, b, issue de M_0. Un point de cette droite a pour coordonnées

$$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho;$$

l'équation aux ρ des points de rencontre de cette droite et de la courbe est

$$f(x_0 + a\rho, y_0 + b\rho) = 0,$$

ou, en développant par la formule de Taylor,

$$(4) \quad \rho(af'_{x_0} + bf'_{y_0}) + \frac{\rho^2}{2}(a^2 f''_{x_0^2} + 2ab f''_{x_0 y_0} + b^2 f''_{y_0^2}) + \ldots = 0.$$

Si l'on choisit arbitrairement a et b, le coefficient de ρ n'est pas nul, donc l'équation admet la racine $\rho = 0$ à l'ordre *un* de multiplicité. Toutefois, elle l'admettra à l'ordre *deux* (au moins), si l'on choisit a et b de manière à satisfaire la relation

$$af'_{x_0} + bf'_{y_0} = 0,$$

c'est-à-dire si l'on prend pour la droite donnée la tangente en M_0.

Supposons maintenant qu'en M_0 la fonction f et ses deux dérivées f'_x et f'_y soient nulles ; résolvons la même question que précédemment, en supposant que toutes les dérivées secondes ne soient pas nulles. Le premier membre de l'équation (4) contiendra en facteur ρ^2, à moins que l'on choisisse a et b de manière à vérifier la relation

$$a^2 f''_{x_0^2} + 2ab f''_{x_0 y_0} + b^2 f''_{y_0^2} = 0\,;$$

bien entendu ce choix n'est possible que si δ_0 est négatif ou nul, et alors il revient à prendre pour la droite donnée l'une des tangentes en M_0. Dans ce cas, une droite menée au hasard par M_0 a donc deux points communs en M_0 avec la courbe, alors qu'une tangente en M_0 en a trois au moins.

Cette remarque est d'une importance capitale : tout d'abord, elle nous épargne tout effort de mémoire en ce qui concerne la détermination d'une tangente. S'agit-il de la tangente en un point simple ? le premier membre de son équation est l'ensemble des termes du premier degré dans le développement de Taylor de $f(x, y)$ autour du système de valeurs x_0, y_0. S'il s'agit d'un point double, l'ensemble des tangentes en ce point est donné en annulant, dans ce même développement, l'ensemble des termes du second degré.

Il en résulte aussi que les équations (1) et (3) conservent leur forme lorsqu'on fait un changement de coordonnées. Cela implique que, si en un point singulier M_0 les dérivées secondes ne sont pas toutes nulles, on peut toujours, par un déplacement des axes, se ramener au cas où f''_{y^2} ne s'annule pas en M_0. Le fait d'avoir

$$f''_{y_0^2} = 0$$

signifierait en effet qu'en M_0 la courbe admet une tangente parallèle à Oy : il suffit donc de choisir un nouveau système OX, OY, tel que OY ne soit parallèle à aucune des tangentes en M_0. Cette précaution est manifestement superflue quand δ_0 est > 0.

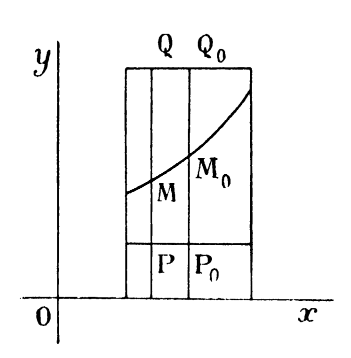
69. Démonstration des résultats précédents et compléments. — Pour simplifier le langage, nous supposerons que Oz est la verticale

ascendante, le plan xOy étant horizontal. Nous essayerons de définir chaque point de la courbe (C), comme la trace horizontale d'une section verticale de la surface (S), parallèle à Oy.

Cas régulier : *f'_y ne s'annule pas en* M_0. — En vertu de la *continuité*, f'_y conserve un signe constant et ne s'annule pas dans toute une région avoisinant le point M_0. Supposons, pour fixer les idées, que f'_y soit positive dans cette région. Nous pouvons dire qu'il existe un rectangle (R) de centre M_0 et de côtés parallèles aux axes, à l'intérieur duquel on a

$$f'_y > A,$$

A désignant un nombre positif (et pas nul). Donc, sur chaque segment PQ d'ordonnée transverse à ce rectangle, f est une fonction croissante de y. Il en est ainsi, en particulier, sur le segment P_0Q_0 qui contient M_0. Comme f s'annule en M_0, elle est négative en P_0 et positive en Q_0 (l'hypothèse $f'_y > A$ l'empêche de s'annuler en aucun point du segment P_0Q_0). A cause de la continuité, on peut, en rétrécissant le rectangle, assurer à la fonction f un signe constant sur chaque côté parallèle à Ox, le signe $-$ sur le côté P_0P, le signe $+$ sur Q_0Q. Tout arc de section verticale de la surface (S), projeté suivant un segment PQ, parallèle à Oy et transverse au nouveau rectangle (R′) ainsi rétréci, part donc d'un point projeté en P, de cote négative, pour monter constamment et aboutir à un point projeté en Q et de cote positive. Il rencontre donc le plan xOy en un point M et un seul. Soient $x_0 + h$, $y_0 + k$ l'abscisse et l'ordonnée de ce point. D'après la formule des accroissements finis, nous aurons



$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$
$$= hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0.$$

Or f'_x est continue dans le rectangle (R′) ; soit B une limite supérieure de sa valeur absolue dans cette aire. L'égalité précédente entraîne

$$|k| < |h| \frac{B}{A};$$

donc k tend vers zéro en même temps que h, ce qui établit la continuité de notre branche de fonction implicite en M_0. Grâce à ce fait et

grâce à la continuité de f'_y et f'_x, on voit que le rapport $\frac{k}{h}$ admet une limite, c'est-à-dire que notre fonction implicite possède, pour la valeur x_0, une dérivée donnée par

$$y'_0 = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Donc, notre arc de courbe, intérieur au rectangle (R'), admet bien au point M_0 une tangente représentée par l'équation

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} = 0.$$

Du raisonnement précédent, il résulte également que cet arc partage le rectangle (R') en deux régions, l'une dans laquelle $f(x, y)$ est négative, l'autre où elle est positive.

Cas où f'_y s'annule en M_0. — Supposons maintenant que f'_{y_0} s'annule, sans qu'il en soit de même de $f''_{y_0^2}$; pour fixer les idées, supposons cette dernière quantité positive ; il en sera ainsi, non seulement en M_0, mais encore, la continuité le veut, dans toute une région avoisinant ce point ; nous pouvons donc affirmer qu'il existe un rectangle (R), de centre M_0 et de côtés parallèles aux axes, dans lequel on a

$$f''_{y^2} > A,$$

A étant un nombre positif (et pas nul). D'après cela, chaque arc de section verticale de la surface (S), projeté sur xOy, suivant un segment PQ parallèle à Oy et transverse à (R), tourne sa concavité vers les z positifs. Il en est ainsi, en particulier, pour l'arc de section verticale projeté en P_0Q_0, qui, en vertu de l'hypothèse $f'_{y_0} = 0$, est tangent en M_0 à P_0Q_0, et par suite a les cotes de tous ses points positives, sauf celle de M_0 qui est nulle. Donc aux points P_0, Q_0, la fonction f sera positive ; à cause de la continuité, on peut encore en rétrécissant (R), assurer à f le signe + sur les côtés parallèles à Ox. Dès lors, sur chaque segment PQ, transverse au nouveau rectangle (R') ainsi obtenu, il est clair que l'équation $f = 0$ aura zéro ou deux racines : un tel segment est en effet la projection d'un arc de section verticale de (S), tournant sa concavité vers la verticale ascendante, et dont les deux extrémités sont au-dessus du plan horizontal. Pour décider définitivement du nombre de racines, il suffit alors de prendre sur chaque arc de section verticale projeté suivant un segment PQ, le point de cote minimum, et de chercher le signe de cette cote. Ce point est fourni en résolvant l'équation

$$(1) \qquad f'_y = 0,$$

où l'on donne à x la valeur de l'abscisse du segment PQ considéré.

Or, d'après le cas régulier du théorème, nous savons que le rectangle (R) [donc aussi, à fortiori, le rectangle (R′)] contient un arc unique (γ) de la courbe $f'_y = 0$, passant au point M_0. Nous sommes donc ramenés à chercher le signe de f aux divers points de l'arc (γ) ; par hypothèse, cette fonction s'annule en M_0 : il importera pour nous de distinguer deux cas, suivant que le fait pour $f(x, y)$ de s'annuler, quand M franchit la position M_0 sur (γ), s'opère avec ou sans changement de signe.

Sur cet arc (γ), $f(x, y)$ devient une fonction composée de x, dont la dérivée se réduit, d'après l'équation (1) qui définit (γ), à f'_x.

Supposons d'abord que f'_x *ne s'annule pas en* M_0. Alors, f change de signe sur (γ), lorsqu'on franchit M_0. Par suite, la courbe $f = 0$ n'existe que d'un seul côté de P_0Q_0 à l'intérieur du rectangle (R′). Ce résultat n'est pas nouveau pour nous ; nous avons déjà dit qu'on peut ici, f'_{x_0} n'étant pas nul, se ramener au cas régulier en échangeant les variables. Mais le fait de le retrouver présente quelque intérêt, en montrant la généralité de la méthode actuelle.

Supposons maintenant que f'_{x_0} *s'annule en* M_0. D'après l'hypothèse du début

$$f'_{y_0} = 0,$$

le point M_0 sera donc un *point singulier*. Il est entendu que nous continuerons à supposer que $f''_{y_0^2}$ n'est pas nul. Il s'agit d'étudier le signe de la cote d'un point de la surface (S), projeté horizontalement sur la courbe (γ), à l'intérieur de (R′). Si nous supposons que M_0 soit le seul point de l'arc (γ) intérieur à (R′) pour lequel f'_x s'annule [ce qui revient à admettre que M_0 est le seul point singulier dans (R′)], sur chacune des portions de (γ) séparées par M_0, la dérivée f'_x conserve un signe constant ; donc quand on suivra l'une des portions, la cote d'un point de la surface qui s'y projette variera toujours dans le même sens, et, par suite, conservera un signe déterminé. Pour connaître ce signe, il nous suffit de prendre la dérivée seconde de la fonction composée $f(x, y)$ considérée le long de l'arc (γ) [1]. Cette dérivée seconde est

$$f''_{x^2} + f''_{xy}\frac{dy}{dx},$$

où $\frac{dy}{dx}$, qui représente le coefficient angulaire de la tangente à (γ), est donné par

$$f''_{xy} + f''_{y^2}\frac{dy}{dx} = 0,$$

---

[1] Cette fonction a d'ailleurs pour diagramme la projection sur le plan zOx de l'arc (Γ) de la surface (S) qui donne en projection horizontale l'arc (γ).

ce qui permet de mettre la dérivée seconde cherchée sous la forme

$$\frac{f''_{x^2}f''_{y^2}-(f''_{xy})^2}{f''_{y^2}}.$$

Son signe est ici celui de son numérateur $rt-s^2$. Le cas le plus simple est celui où cette quantité ne s'annule pas en M_0.

1° Si l'on a

$$r_0t_0-s_0^2>0,$$

l'arc (Γ) de la surface (S), projeté sur xOy suivant (γ), est tout entier au-dessus du plan xOy. Donc, tout segment PQ transverse à (R′) est la projection horizontale d'un arc de section de (S) situé tout entier au-dessus de xOy. Donc, la trace horizontale de la surface se réduit, à l'intérieur du rectangle (R′), au point M_0, qui est bien un point isolé de la courbe (C).

2° Si l'on a

$$r_0t_0-s_0^2<0,$$

l'arc (Γ) est au-dessous de xOy. Chaque arc de section verticale de (S) projeté horizontalement suivant un de nos segments PQ coupe donc, à l'intérieur de (R′), le plan horizontal en deux points. Donc, dans (R′), il y a deux déterminations de y qui vérifient l'équation $f=0$; toutes deux tendent vers y_0 quand x tend vers x_0, car, si nous appliquons la formule de Taylor, en appelant y_0+k l'une des valeurs de y qui correspond à x_0+h, nous aurons

$$h^2f''_{x^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+2hkf''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$
$$+k^2f''_{y^2}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)=0;\qquad (0<\theta<1)$$

il suffit alors de remarquer que le coefficient de k^2 reste supérieur à A, et que ceux de h^2 et hk sont, à cause de la continuité, bornés supérieurement, pour en déduire que chacune des deux valeurs de k tend vers zéro avec h. On voit de plus qu'il y aura, pour chaque valeur du rapport $\frac{k}{h}$, une limite quand h tend vers zéro. Les deux valeurs limites en question seront les racines de l'équation

$$(1)\qquad t_0m^2+2s_0m+r_0=0,$$

qui, en vertu de l'hypothèse, sont réelles et distinctes. Ainsi, le point M_0 est bien, dans les conditions actuelles, un point double, et le faisceau des tangentes en ce point a pour équation

$$(x-x_0)^2f''_{x_0^2}+2(x-x_0)(y-y_0)f''_{x_0y_0}+(y-y_0)^2f''_{y_0^2}=0.$$

3° Supposons enfin que l'on ait

$$r_0t_0-s_0^2=0.$$

Deux circonstances distinctes s'offrent à nous :

a) Lorsque sur (γ) on franchit le point M_0, la quantité $rt - s^2$ s'annule en changeant de signe : c'est d'ailleurs là le cas le plus fréquent. Alors l'arc (Γ) de (S) traverse en M_0 le plan xOy ; parmi les arcs de section verticale de (S) projetés suivant des segments PQ, ne rencontrent le plan xOy que ceux qui sont d'un certain côté de P_0Q_0. Ce cas correspond au point de rebroussement ordinaire ; on établit comme précédemment la continuité de deux déterminations de y, qui maintenant n'existent plus que d'un seul côté de la valeur x_0. Nous laissons au lecteur de soin d'achever ce raisonnement et de montrer que le coefficient angulaire de la tangente de rebroussement est la racine double de l'équation (1) ; cette dernière est d'ailleurs aussi égale au coefficient angulaire de la tangente en M_0 à la courbe (γ).

b) Lorsque sur (γ) on franchit le point M_0, la quantité $rt - s^2$ s'annule sans changer de signe. Si elle est positive, on en conclut comme précédemment que M_0 est un point isolé. Si elle est négative, il y a deux branches de la courbe $f = 0$, à l'intérieur du rectangle (R') ; ces deux branches, qui existent de part et d'autre de M_0, admettent en ce point une même tangente, dont le coefficient angulaire est encore la racine double de l'équation (1) ; elle se confond d'ailleurs avec la tangente en M_0 à l'arc (γ).

En supposant le point M_0 à l'origine, on obtient des exemples de ces deux dernières circonstances en considérant les courbes

$$x^2(x^2 + y^2) + y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2(x^2 + y^2) - y^2 = 0,$$

que nous laissons au lecteur le soin d'étudier. Nous lui conseillons d'ailleurs, au cas où il éprouverait quelque difficulté, de reprendre le raisonnement que nous venons de donner, sur des exemples numériques, et de revenir à ces considérations, après avoir lu ce qui concerne les courbes algébriques.

Remarques. — I. Nous avons supposé que M_0 fournit sur l'arc (γ) un zéro isolé de f'_x. Si, le long de cet arc (γ), on avait en tous les points

$$f'_x = 0,$$

il en résulterait que, sur (γ), $f(x, y)$ serait constant et par suite égal à zéro. Tous les arcs de section verticale de (S) projetés suivant des segments PQ transverses à (R') seraient tangents au plan xOy en des point répartis sur l'arc (γ). Donc la surface (S) serait tangente au plan xOy, tout le long de cet arc. On obtient un exemple de ce cas en supposant que $f(x, y)$ soit de la forme

$$f(x, y) \equiv [y - \varphi(x)]^2 \psi(x, y),$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction qui ne s'annule pas dans le rectangle considéré.

II. — La théorie précédente nous montre que la recherche des maxima et des minima des fonctions de deux variables présente des différences profondes avec le même problème pour les fonctions d'une seule variable (cf n° 67[bis]). Soit x_0, y_0 une solution isolée du système

$$f'_x = f'_y = 0,$$

telle que $f''_{y_0^2}$ ne soit pas nulle ; supposons que cette dérivée soit positive. L'analyse précédente nous indique à quelle condition x_0, y_0 fournit un minimum. Il faut et il suffit pour cela que la fonction f soit elle-même minimum sur la courbe (γ). En particulier, on est assuré qu'il en est ainsi lorsqu'on a, outre les conditions précédentes,

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0.$$

III. — On pourrait généraliser l'analyse précédente et étudier le cas où toutes les dérivées partielles s'annulent en M_0 jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement, en adjoignant l'hypothèse

$$f^{(p)}_{y_0^p} \neq 0.$$

Sur chaque segment PQ, transverse à un certain rectangle (R′) défini comme précédemment, l'équation $f=0$ aurait alors p racines au plus. Considérons l'équation

$$\text{(E)} \qquad (mf'_{y_0} + f'_{x_0})^{(p)} = 0\,;$$

supposons que ses racines réelles soient simples ; on établit que chacune d'elles fournit une branche de courbe passant en M_0 et admettant en ce point une tangente, dont le coefficient angulaire est égal à cette racine. Lorsque l'équation (E) admet des racines réelles multiples, la question est plus délicate : une racine double de (E) peut fournir des arcs dont l'ensemble pris isolément formerait un rebroussement, ou encore deux arcs simples tangents ; enfin elle peut ne donner naissance à aucune branche réelle, etc... ; plus généralement, chaque racine multiple réelle de (E) fournit un système de branches de courbe, pouvant présenter toutes les configurations que l'on rencontrerait si cette racine, conservant son ordre de multiplicité, était unique, le nombre p devenant égal à cet ordre.

Nous reviendrons sur les courbes

$$f(x, y) = 0$$

lorsque la fonction f est un polynome entier. Dans ce cas seulement, nous indiquerons le moyen de déterminer les asymptotes (voyez n° 78).

VII. — Surfaces définies par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$.

70. En généralisant les méthodes précédentes, on établit des résultats que nous nous bornerons à énoncer, en donnant parfois, pour faciliter la compréhension, des indications rapides sur les démonstrations.

1° *Soit l'équation* $\qquad f(x, y, z) = 0;$

si l'on a $\quad f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad$ *avec* $\quad f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$

il passe au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *une nappe unique de la surface* $f = 0$: *elle admet en ce point un plan tangent, qui a pour équation*

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} + (z - z_0)f'_{z_0} = 0.$$

Voici d'ailleurs le moyen d'établir l'équation du plan tangent. Considérons une courbe tracée sur la surface et passant par M_0. Quelle que soit cette courbe, nous en adopterons une représentation paramétrique telle qu'une valeur bien déterminée, t_0, fournisse toujours le point M_0; soit

$$x = A(t), \qquad y = B(t), \qquad z = C(t).$$

Ces trois fonctions satisfont à l'identité

$$f[A(t), B(t), C(t)] = 0.$$

Le premier membre s'annule identiquement; par suite, il en est de même de sa dérivée par rapport à t. Donc les paramètres directeurs d'une tangente en M_0 à une courbe issue de ce point sur la surface sont liés par la relation

$$f'_{x_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + f'_{y_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + f'_{z_0}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0.$$

Toutes ces tangentes sont donc orthogonales au vecteur de projections $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ et par suite sont situées dans un même plan [1]

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} + (z - z_0)f'_{z_0} = 0. \quad \text{(C. Q. F. D.)}$$

---

(1) On peut, comme en géométrie plane (67bis), introduire le *gradient* f'_x, f'_y, f'_z de la fonction f du point (x, y, z) : la projection du gradient sur une demi-droite issue de ce point donne encore la dérivée suivant cette demi-droite. Quant à la direction même du gradient, c'est celle qui donne à cette dérivée la valeur maximum. Appelons *surfaces de niveau* les surfaces $f =$ const.; le gradient est orthogonal en chaque point à la surface de niveau qui y passe.

2° Du cas précédent, on passe facilement à celui où f'_{z_0} est nul, sans que f'_{x_0} et f'_{y_0} le soient eux-mêmes tous les deux. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$f'_{y_0} \neq 0;$$

nous pouvons, d'après l'énoncé précédent, définir y en fonction de x et z et affirmer qu'il existe une nappe unique de la surface qui passe en M_0. Elle admet en ce point un plan tangent parallèle à Oz.

3° Supposons qu'au point M_0 on ait simultanément

$$f'_{x_0} = f'_{y_0} = f'_{z_0} = 0,$$

le théorème du plan tangent est en défaut : les tangentes aux diverses courbes de la surface issues de M_0 ne sont plus dans un même plan.

Ainsi, en posant

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

nous obtenons une surface qui passe par l'origine. En ce point, les trois dérivées partielles s'annulent. Or il est facile de reconnaître que cette surface est un cône de révolution d'axe Oz, ayant pour sommet le point O ; géométriquement, il est évident qu'il n'y a pas de plan passant par O et contenant les tangentes en ce point à toutes les courbes du cône qui en sont issues.

Toutes les fois que l'on a

$$f'_{x_0} = f'_{y_0} = f'_{z_0} = 0,$$

on dit que M_0 est un *point singulier* de la surface. C'est d'ailleurs là une propriété indépendante du choix des axes de coordonnées, car si après une transformation d'axes l'équation de la surface est devenue

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

il est facile de reconnaître que F'_X, F'_Y, F'_Z sont des fonctions linéaires et homogènes de f'_x, f'_y, f'_z. On en déduit que M_0 est aussi un point singulier pour toute section plane de la surface dont le plan contient ce point : grâce à la propriété précédente, il suffit en effet d'établir le théorème pour le plan xOy en supposant qu'il contienne M_0, et, dans ce cas particulier, le résultat s'aperçoit immédiatement.

Quand M_0 est un point singulier, des circonstances très diverses

peuvent se produire. Supposons que dans le voisinage de M_0 il n'y ait pas d'autre point singulier, c'est-à-dire que M_0 soit l'unique point singulier à l'intérieur d'une sphère de centre M_0 et de rayon assez petit. Supposons en outre que *toutes les dérivées du second ordre de f ne s'annulent pas en* M_0. Il peut arriver que le point M_0 soit un *point isolé* de la surface $f=0$; c'est manifestement ce qui arrive si ce point est isolé pour toutes les sections planes situées dans les plans menés par M_0. Ou bien encore le point M_0 est un point *conique* de cette surface : le lieu des tangentes en M_0 aux courbes issues de ce point est alors un cône du second degré. Il peut arriver que ce cône se décompose en deux plans : cela donne pour la surface, dans le voisinage de M_0, des formes particulières qu'il nous est impossible d'étudier ici.

Pour obtenir l'équation de ce cône, remarquons qu'un de ses plans sécants passant par M_0 le coupe suivant les tangentes au point M_0, à la section déterminée par ce plan dans la surface. Chacune de ces tangentes possède la propriété caractéristique (n° 68, remarque) d'avoir, avec la section, plus de deux points communs confondus avec M_0. Donc le cône cherché est alors le lieu des droites menées par M_0 et ayant avec la surface, en M_0, plus de deux points communs. On obtient donc, ici encore, son équation en annulant dans le développement de Taylor de $f(x, y, z)$, autour du système de valeurs x_0, y_0, z_0, l'ensemble des termes du second degré, ce qui donne

$$(x-x_0)^2 f''_{x_0^2} + (y-y_0)^2 f''_{y_0^2} + (z-z_0)^2 f''_{z_0^2} + 2(y-y_0)(z-z_0) f''_{y_0 z_0} + 2(z-z_0)(x-x_0) f''_{x_0 z_0} + 2(x-x_0)(y-y_0) f''_{x_0 y_0} = 0.$$

En général, si en M_0 la fonction f est nulle, ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement, le lieu des tangentes en M_0 (si ce point n'est pas un point isolé) sera un cône d'ordre p, dont on obtient l'équation en annulant les termes du degré p dans le même développement de Taylor.

Notons enfin qu'une surface peut présenter des *lignes de points singuliers*. Supposons, par exemple, que la ligne (L) définie par

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

soit tout entière sur la surface

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

et que l'on ait, en chacun de ses points,

$$(2) \qquad f'_y = f'_z = 0,$$

relations qui expriment que chaque point de (L) est un point singulier pour la section de la surface parallèle à yOz menée par ce point. La

relation (1) devient une identité quand on y remplace y par $\varphi(x)$ et z par $\psi(x)$. De cette identité, on déduit que l'on a, le long de L,

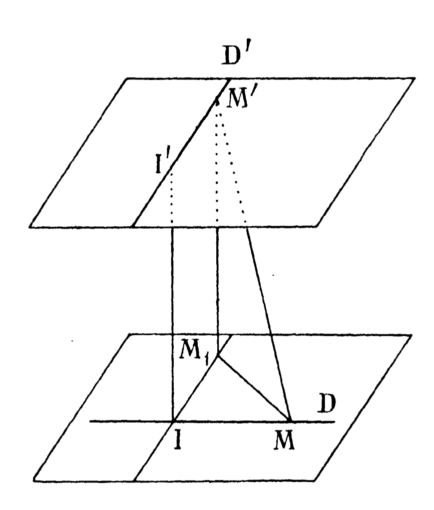
$$f'_x + f'_y \cdot \varphi'(x) + f'_z \cdot \psi'(x) = 0,$$

d'où, en vertu des relations (2),

$$f'_x = 0.$$

La ligne L est donc un lieu de points singuliers de la surface considérée.

Un exemple de telles lignes est fourni par la surface lieu des droites de longueur constante, qui s'appuient dans l'espace sur deux droites orthogonales D et D'. Soient a la longueur de la perpendiculaire commune II' à ces deux droites et b la longueur constante du segment MM'. L'élève trouvera l'équation de la surface engendrée par MM' et montrera qu'elle admet D et D' pour lignes singulières. Il construira ensuite des sections planes de la surface, et vérifiera qu'elles présentent sur D et sur D' un point double, un point de rebroussement, ou un point isolé; en particulier, on obtient un point double sur l'une de ces droites lorsque le plan sécant la coupe à l'intérieur du segment qui a pour milieu I ou I' et pour longueur $2\sqrt{b^2 - a^2}$.



VIII. — Courbes de l'espace définies par deux équations implicites

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

71. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point situé à la fois sur chacune des surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Supposons d'abord qu'il ne soit singulier pour aucune de ces surfaces, et que les plans tangents en ce point soient distincts, c'est-à-dire que

les trois quantités

$$f'_{y_0}g'_{z_0} - f'_{z_0}g'_{y_0}, \qquad f'_{z_0}g'_{x_0} - f'_{x_0}g'_{z_0}, \qquad f'_{x_0}g'_{y_0} - f'_{y_0}g'_{x_0}$$

ne soient pas nulles simultanément. On démontre qu'au point M_0 il passe une seule branche de courbe satisfaisant aux équations $f=g=0$, et qu'en ce point cette courbe admet une tangente. Cela posé, il est évident que cette droite sera forcément l'intersection des deux plans tangents. Elle est donc représentée par les équations

$$(x-x_0)f'_{x_0} + (y-y_0)f'_{y_0} + (z-z_0)f'_{z_0} = 0,$$
$$(x-x_0)g'_{x_0} + (y-y_0)g'_{y_0} + (z-z_0)g'_{z_0} = 0.$$

Le point M_0 étant toujours un point régulier pour chacune de nos surfaces, supposons qu'en ce point les plans tangents soient confondus. Il existe alors un nombre λ tel qu'on ait

$$(1) \qquad f'_{x_0} + \lambda g'_{x_0} = 0, \qquad f'_{y_0} + \lambda g'_{y_0} = 0, \qquad f'_{z_0} + \lambda g'_{z_0} = 0.$$

Le système des équations $f = g = 0$ est d'ailleurs équivalent au suivant :

$$f = 0, \qquad f + \lambda g = 0.$$

On est donc ramené à étudier, au voisinage du point M_0, la forme de l'intersection de la surface $f = 0$, qui admet un plan tangent en ce point, avec une surface $f + \lambda g = 0$, qui, en vertu des relations (1), admet M_0 comme point singulier. Supposons qu'en M_0 toutes les dérivées secondes de $f + \lambda g$ ne soient pas nulles. Le plus fréquemment, M_0 sera un point isolé, ou un point conique d'ordre deux de la surface. Dans le premier cas, M_0 sera un point isolé de l'intersection. Dans le deuxième, M_0 sera isolé si le cône des tangentes (Γ) à la deuxième surface n'a aucune génératrice commune avec le plan tangent (ϖ) à la première ; M_0 sera un point de rebroussement si (ϖ) est tangent à (Γ); enfin si (ϖ) coupe (Γ), M_0 sera un point double, les tangentes en ce point étant les génératrices d'intersection.

Nous nous en tiendrons à ces indications sommaires, ne pouvant aborder ici la théorie de la recherche simultanée de deux fonctions implicites y et z d'une même variable x.

CHAPITRE V

COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES [1]

I. — Ordre d'un point d'une courbe plane ou d'une surface algébrique.

72. Tout ce qui vient d'être dit sur la théorie des courbes et des surfaces concerne exclusivement la géométrie réelle. Dans ce domaine, les théorèmes généraux que nous avons donnés n'ont jamais fait intervenir l'hypothèse que les courbes ou les surfaces considérées fussent algébriques : nous avons simplement supposé parfois qu'on pouvait développer le premier membre de leurs équations par la formule de Taylor.

Nous allons maintenant nous restreindre à l'étude des courbes et des surfaces algébriques. Pour en développer la théorie en toute généralité, nous devrons nous servir des éléments fictifs qui ont été introduits au chapitre III : nous ne ferons aucune distinction entre un point réel et un point imaginaire, un point à distance finie et un point à l'infini. Ayant ainsi obtenu des énoncés généraux, il nous restera à examiner quelle partie en subsiste dans le domaine réel, et ce que donne pratiquement la distinction des points à distance finie et des points à l'infini.

73. Nous avons déjà défini l'*ordre* d'une courbe plane ou d'une

[1] Dans ce chapitre, les axes peuvent être supposés indifféremment rectangulaires ou obliques.

surface. Nous introduirons maintenant l'*ordre d'un de ses points*. A cet effet, nous établirons le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* M_0 *un point d'une courbe plane ou d'une surface algébrique d'ordre m. Lorsqu'on dénombre ses points de rencontre avec une droite issue de* M_0, *ce point intervient toujours pour le même nombre d'unités* (sauf pour des positions exceptionnelles de cette droite, que nous allons apprendre à définir). C'est ce nombre constant qu'on appelle l'*ordre du point* M_0.

Raisonnons, pour fixer les idées, sur la courbe (C), définie en coordonnées homogènes, par l'équation

$$F(X, Y, T) = 0.$$

Soit $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ un point de cette courbe. Par M_0 menons au hasard une droite Δ, que nous déterminerons en donnant les coordonnées X_1, Y_1, T_1 d'un autre de ses points, M_1 par exemple. Tout point de Δ a des coordonnées homogènes telles que

$$X_0 + \Lambda X_1, \qquad Y_0 + \Lambda Y_1, \qquad T_0 + \Lambda T_1.$$

Donc, les Λ des points de rencontre de Δ et de la courbe sont les racines de l'équation

$$F(X_0 + \Lambda X_1, Y_0 + \Lambda Y_1, T_0 + \Lambda T_1) = 0\,;$$

en la développant par la formule de Taylor (ici limitée) et en tenant compte de ce que M_0 est sur la courbe, nous obtenons l'équation

$$\Lambda(X_1 F'_{X_0} + Y_1 F'_{Y_0} + T_1 F'_{T_0}) + \frac{\Lambda^2}{2}(X_1 F'_{X_0} + Y_1 F'_{Y_0} + T_1 F'_{T_0})^{(2)} + \cdots = 0\,;$$

elle admet la racine $\Lambda = 0$. Dans son premier membre, le coefficient de Λ^p est en général un polynome

$$\varphi_p(X_1, Y_1, T_1) = \frac{1}{p!}(X_1 F'_{X_0} + Y_1 F'_{Y_0} + T_1 F'_{T_0})^{(p)},$$

homogène et de degré p, admettant pour coefficients, à des facteurs numériques près, les dérivées d'ordre p de $F(X, Y, T)$ au point M_0.

Supposons la droite Δ menée *au hasard* par M_0. Si les coefficients de Λ, Λ^2, . . ., Λ^{p-1} sont identiquement nuls, celui de Λ^p ne l'étant pas, la racine $\Lambda = 0$ sera d'ordre p de multiplicité, et, dans le bilan des points d'intersection, M_0 comptera pour p unités. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'en M_0 toutes les dérivées de F s'annulent

jusqu'à l'ordre $p-1$ inclus, l'une au moins des dérivées d'ordre p étant différente de zéro ([1]).

Cela posé, le seul cas où M_0 pourrait, dans notre dénombrement, compter pour plus de p unités, est celui où le point M_1 serait choisi de telle façon que l'on ait

$$(1) \qquad \varphi_p(X_1, Y_1, T_1) = 0.$$

Or, cette équation exprime manifestement, non pas tant une condition imposée au point M_1 lui-même qu'à la droite M_0M_1 ; il est clair en effet que si un point M_1 la vérifie, il en est de même de tout point de la droite M_0M_1. C'est dire que le lieu défini par l'équation (1) est un faisceau de p droites issues de M_0.

Ainsi, à part les positions exceptionnelles fournies par les droites de ce faisceau, une droite issue de M_0 possède en commun avec la courbe p points confondus avec M_0.

Le raisonnement est absolument le même s'il s'agit d'une surface. Soit M_0 un point de la surface

$$F(X, Y, Z, T) = 0.$$

Supposons qu'en M_0 toutes les dérivées d'ordre $p-1$ de F s'annulent, ce qui entraîne la même propriété pour les dérivées d'ordre moindre et pour F elle-même. Les points d'intersection d'une droite M_0M_1 avec la surface se déterminent comme précédemment, en résolvant une équation de la forme

$$\frac{\Lambda^p}{p!}(X_1 F'_{X_0} + Y_1 F'_{Y_0} + Z_1 F'_{Z_0} + T_1 F'_{T_0})^{(p)} + \cdots = 0,$$

qui admet la racine $\Lambda = 0$ à l'ordre de multiplicité p, sauf si le point M_1 est situé sur la surface

$$\varphi_p(X_1, Y_1, Z_1, T_1) = (X_1 F'_{X_0} + Y_1 F'_{Y_0} + Z_1 F'_{Z_0} + T_1 F'_{T_0})^{(p)} = 0.$$

Comme précédemment, si un point M_1 est sur cette surface, il en est de même de tout point de la droite M_0M_1. Cette surface est donc un cône d'ordre p ayant pour sommet le point M_0. Ici, les positions exceptionnelles de la droite M_0M_1 sont donc situées sur un cône.

74. Pour bien montrer l'importance de la notion d'*ordre* d'un point, nous en donnerons une application. Démontrons le théorème suivant :

([1]) Il suffit d'ailleurs d'exprimer que toutes les dérivées d'ordre $p-1$ sont nulles en M_0 pour que la même propriété en résulte pour les dérivées d'ordre moindre. On le voit par des applications successives de l'identité d'Euler.

Une courbe plane d'ordre p qui a un point multiple d'ordre p se décompose en un faisceau de p droites, ayant pour sommet ce point.

En effet, la droite qui joint le point d'ordre p à tout autre point de la courbe a plus de p points communs avec cette courbe, donc elle en fait partie (n° 44).

L'élève établira de même la proposition suivante :

Une surface d'ordre p qui possède un point multiple d'ordre p se réduit à un cône. Si elle possède un deuxième point multiple d'ordre p, ce cône se réduit lui-même à un système de p plans.

Supposons en particulier $p = 2$. Nous aurons les énoncés suivants :

Une courbe plane du second ordre, non décomposée, n'a que des points d'ordre un.

Une surface du second ordre peut :

1° ou bien n'avoir que des points d'ordre un ;

2° ou bien avoir un seul point d'ordre deux : elle se réduit alors à un cône. Si elle a deux points d'ordre deux, elle se décompose en un système de deux plans.

75. Les deux notions fondamentales que nous avons introduites jusqu'à présent dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, à savoir l'ordre de la courbe ou de la surface et l'ordre d'un de ses points, sont des conséquences immédiates du théorème de d'Alembert et de la théorie des racines multiples d'une équation algébrique. Dans cette théorie, la définition, purement arithmétique, de l'ordre de multiplicité d'une racine est complétée par une proposition qui caractérise cet ordre, au point de vue infinitésimal. C'est le *théoréme de la continuité des racines*. Nous l'énoncerons sous la forme suivante :

Si, pour la valeur x_0, le nombre y_0 est racine d'ordre p de l'équation en y

$$f(x, y) = 0,$$

où f désigne un polynome entier, cette même équation admet p racines, qui tendent vers y_0 quand x tend vers x_0.

De ce théorème résultent, pour notre objet actuel, d'importantes conséquences.

Soit M_0 un point d'ordre p sur la courbe

$$F(X, Y, T) = 0.$$

Soit Δ une droite qui varie de manière à venir tendre vers une position limite passant par M_0 et distincte d'une des droites du faisceau

$$(XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0})^{(p)} = 0.$$

Nous pouvons, grâce au théorème précédent, affirmer qu'il y a p points de rencontre de Δ et de la courbe qui tendent vers M_0 quand Δ tend vers la position limite considérée. En nous exprimant dans un langage géométrique généralisé, nous pouvons encore dire qu'au point M_0 se croisent p branches de la courbe : la distinction de ces branches est obtenue en individualisant chaque point de rencontre de la courbe avec Δ et en faisant intervenir la continuité.

Étendant au cas d'une branche de courbe imaginaire la notion de tangente, nous dirons qu'une des branches de courbe issue de M_0 admet une tangente en ce point, si la droite qui joint le point M_0 à un point de cette branche de coordonnées homogènes infiniment voisines (1) possède une position limite. Il est clair que cette position limite ne peut être qu'une des droites

$$(XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0})^{(p)} = 0,$$

qui ont, en M_0, plus de p points confondus avec la courbe. Inversement, soit D une droite de ce faisceau : appelons δ une droite variable, issue de M_0, et tendant vers D. En plus des p points communs de δ et de la courbe qui sont confondus avec M_0, il y en a au moins un $(p+1)^{\text{ième}}$, qui tend vers M_0 quand δ tend vers D ; c'est dire que D est tangente à la branche sur laquelle se déplace ce $(p+1)^{\text{ième}}$ point.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Une courbe algébrique admet, en un point d'ordre p, p tangentes (non forcément distinctes), *qui sont précisément les droites du faisceau*

$$(XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0})^{(p)} = 0.$$

En particulier, *en un point d'ordre un, l'équation de la tangente* est

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0} = 0.$$

En raisonnant de même pour une surface algébrique, on voit qu'en un point M_0 d'ordre p, le cône des droites exceptionnelles

$$(XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + ZF'_{Z_0} + TF'_{T_0})^{(p)} = 0,$$

(1) Nous avons garde de dire « un point infiniment voisin », ce qui conduirait à une absurdité pour les points à l'infini.

qui ont plus de p points communs avec la surface, n'est autre que le lieu des tangentes à la surface en M_0. Dans le cas de $p = 1$, ce cône se réduit à un plan, et nous avons le résultat suivant :

En un point d'ordre un, une surface algébrique admet un plan tangent, qui a pour équation

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + ZF'_{Z_0} + TF'_{T_0} = 0.$$

76. Relations de la notion d'ordre d'un point avec les résultats du chapitre précédent. — Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique en coordonnées non homogènes. Si m est l'ordre de cette courbe, son équation homogène sera

$$F(X, Y, T) = 0,$$

en posant

$$F(X, Y, T) \equiv T^m f(x, y), \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{X}{T} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{Y}{T}.$$

Or, le théorème des fonctions composées nous donne

$$\begin{aligned} F'_X &= T^{m-1} f'_x, \\ F'_Y &= T^{m-1} f'_y, \\ F'_T &= T^{m-1}\left[m f(x, y) - x f'_x - y f'_y\right], \end{aligned}$$

formules dont l'identité d'Euler est d'ailleurs une conséquence.

Cela posé, appelons $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ un point de notre courbe, réel et à distance finie. Pour que ce point soit d'ordre un, il faut et il suffit que F'_X, F'_Y, F'_T ne s'y annulent pas simultanément, ce qui revient, d'après les formules précédentes, à dire qu'en ce point, on n'a pas simultanément

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ainsi, quand nous revenons aux éléments réels, la notion de point d'ordre un se confond avec celle de point ordinaire (opposée à celle de point singulier).

Comme application du calcul précédent, l'élève s'exercera à passer de la forme suivante de l'équation de la tangente en un tel point

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + TF'_{T_0} = 0,$$

à celle qui a été indiquée au chapitre précédent,

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} = 0,$$

et inversement.

Ces résultats se généralisent sans difficulté aux surfaces. Un point

d'ordre un d'une surface, réel et à distance finie, correspond à ce que, dans le chapitre précédent, nous appelions point ordinaire ou régulier.

Plus généralement, en calculant les dérivées d'ordre quelconque de la fonction F à l'aide de f et de ses dérivées, on établit la proposition suivante :

Si le point M_0 *est d'ordre p, la fonction* $f(x, y)$ *s'il s'agit d'une courbe* (ou $f(x, y, z)$ s'il s'agit d'une surface) *s'annule en ce point ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre* $p - 1$ *inclus et réciproquement.*

On peut aussi le voir directement. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point d'ordre p de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Une droite de paramètres directeurs a, b, menée au hasard par M_0, doit avoir p points communs confondus avec la courbe. Donc l'équation

$$f(x_0 + a\rho, y_0 + b\rho) = 0$$

doit admettre la racine $\rho = 0$ à l'ordre p. L'application de la formule de Taylor fournit immédiatement le résultat annoncé. La condition pour que la direction (a, b) soit celle d'une tangente s'obtient en égalant à zéro le coefficient de ρ^p. Nous avons déjà signalé d'ailleurs cette manière d'opérer pour obtenir les tangentes, dans le cas de $p = 1$ et celui de $p = 2$. Le procédé est général et, en même temps, nous voyons la concordance des résultats de ce chapitre avec ceux du précédent.

En particulier, supposons que l'on ait $x_0 = y_0 = 0$. En appliquant le raisonnement qui précède au polynome $f(x, y)$ décomposé en groupes homogènes, nous obtenons le résultat suivant :

Pour que l'origine soit un point d'ordre p de la courbe $f(x, y) = 0$, *il faut et il suffit que, dans f, les termes de plus bas degré soient d'ordre p. Appelons* $\varphi_p(x, y)$ la fonction homogène fournie par ces termes. *L'ensemble des tangentes, réelles ou imaginaires, à l'origine, a pour équation*

$$\varphi_p(x, y) = 0.$$

En ce qui concerne les surfaces, nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et d'établir les résultats correspondants, qui sont en tous points analogues.

77. Attirons l'attention sur une conséquence importante de ce qui précède. Nous avons vu que l'intersection d'une surface avec un de ses plans tangents présente au point de contact un point singulier, c'est-à-dire, si la surface est algébrique, un point d'ordre deux au moins. Il va sans dire que cette propriété, établie pour un plan tangent réel, s'étend à tout plan tangent, sa vérification algébrique se faisant pour un plan imaginaire comme pour un plan réel. On en déduit immédiatement la proposition suivante :

Tout plan tangent à une surface du second ordre la coupe suivant un système de deux droites.

Une surface du second ordre admet donc des génératrices rectilignes. Nous étudierons plus tard les propriétés de ces génératrices.

II. — Points à l'infini des courbes algébriques planes : asymptotes.

78. Nous allons maintenant étudier les propriétés des courbes algébriques planes, auxquelles donne naissance la distinction des points à l'infini. Soit la courbe algébrique (C), définie, en coordonnées non homogènes, par l'équation

$$(1)\quad f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \cdots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0,$$

qui correspond, en coordonnées homogènes, à

$$(2)\quad F(X, Y, T) = \varphi_m(X, Y) + T\varphi_{m-1}(X, Y) + \cdots + T^{m-1}\varphi_1(X, Y) + T^m\varphi_0 = 0.$$

Pour le moment, nous n'établirons aucune distinction entre les éléments réels et les éléments imaginaires. Nous pouvons donc dire : la droite de l'infini coupe la courbe (C) en m points, deux à deux distincts ou non. On les obtient en faisant $T = 0$ dans l'équation homogène de la courbe, ce qui nous donne

$$\varphi_m(X, Y) = 0.$$

Cette équation est celle d'un faisceau (F) de droites issues de O ;

le point à l'infini de chacune d'elles est l'un des points à l'infini de notre courbe. Montrons que *chacune de ces droites constitue une direction asymptotique* de la courbe [1]. Pour cela, imaginons qu'au lieu de couper la courbe par la droite de l'infini, on détermine ses points de rencontre avec la droite

$$(\Delta) \qquad AX + BY = T.$$

L'équation obtenue en remplaçant dans (2) la variable T par $AX + BY$ nous fournit le faisceau (φ) des droites qui joignent le point O aux points de rencontre de (C) et de (Δ). Or quand A et B tendent simultanément vers zéro, tous les points de (Δ) s'éloignent indéfiniment, et, en même temps, les droites du faisceau (φ),

$$\varphi_m(X, Y) + (AX + BY)\varphi_{m-1}(X, Y) + \cdots + (AX + BY)^{m-1}\varphi_1(X, Y) + (AX + BY)^m\varphi_0 = 0,$$

tendent respectivement, d'après le théorème de la continuité des racines [2], vers les droites du faisceau (F). Il est donc établi que chaque droite joignant l'origine à un point de rencontre de (Δ) avec la courbe possède, lorsque (Δ) et par suite ce point s'éloignent indéfiniment, une position limite, qui est l'une des droites du faisceau (F).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute courbe algébrique d'ordre m admet m directions asymptotiques, réelles ou imaginaires, distinctes ou non. On les obtient en annulant, dans son équation en coordonnées non homogènes, l'ensemble des termes de plus haut degré.

79. Il nous reste à voir s'il existe des asymptotes parallèles

(1) Pour une branche de courbe imaginaire, le fait d'admettre soit une direction asymptotique, soit une asymptote, se définit de la même manière que s'il s'agissait d'une branche réelle. On est encore conduit à chercher, le long de cette branche, les limites de $\frac{y}{x}$ et de $y - cx$.

(2) Pour éviter toute difficulté, on pourra appliquer ce théorème à l'équation qui donne les abscisses des points de rencontre des droites du faisceau (φ) avec une droite qui ne passe pas par l'origine, et qui n'est parallèle ni à Oy ni à aucune des droites du faisceau (F).

aux directions que nous venons d'obtenir. A cet effet, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une droite située à distance finie soit asymptote d'une courbe algébrique, il faut et il suffit qu'elle lui soit tangente en l'un de ses points à l'infini.*

1° La condition est nécessaire. En effet, dire qu'une droite D est asymptote à la courbe (C), c'est dire qu'un point de rencontre de cette courbe et d'une parallèle D_1 à D, qui tend vers D, s'éloigne indéfiniment. Cela se ramène donc encore à affirmer que la courbe (C) passe par le point à l'infini d de D, et que D a en d plus de points communs avec (C) qu'une droite D_1 menée au hasard par d ; donc enfin que D est l'une des tangentes à (C) au point à l'infini d.

2° Elle est suffisante. En effet, soit D l'une des tangentes au point à l'infini d de la courbe (C), et D_1 une droite quelconque issue de ce point, c'est-à-dire parallèle à D. Lorsque D_1 tend vers D, un autre point de rencontre de D_1 et de (C) admet des coordonnées homogènes qui tendent vers celles de d : donc ce point s'éloigne indéfiniment. Par suite (D) est bien une asymptote.

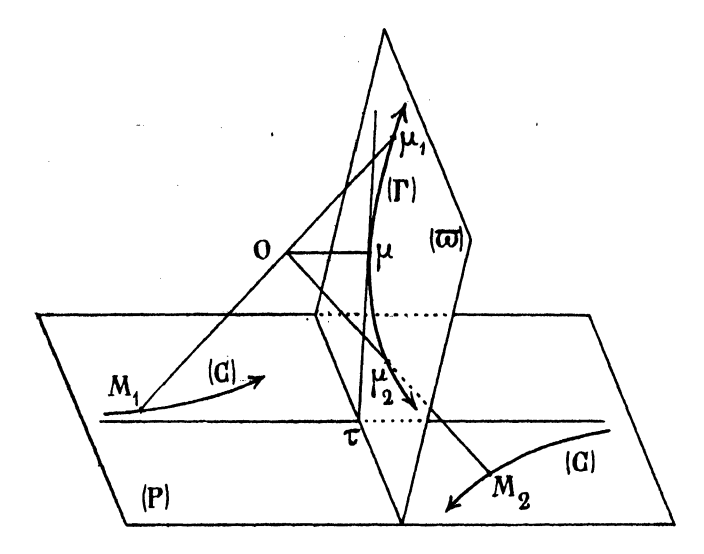
80. Le problème de la recherche des asymptotes rectilignes est donc théoriquement résolu. On prend les points de rencontre de la courbe avec la droite de l'infini ; on mène la ou les tangentes en chacun de ces points. Celles de ces droites qui sont à distance finie fournissent des asymptotes rectilignes, et, d'après le théorème précédent, il n'y en a pas d'autres. Pour compléter notre étude, il nous reste à chercher ce qu'il advient lorsqu'on se place exclusivement au point de vue des éléments réels.

Le problème que nous devons alors examiner peut, par l'intermédiaire d'une perspective, qui ramène à distance finie les points à l'infini de (C), être résolu en faisant appel aux propositions générales qui ont été énoncées dans le chapitre précédent. Considérons donc la courbe (C) du plan (P) comme la perspective d'une courbe (Γ) du plan (ϖ), courbe qui sera algébrique et de même degré que (C). La droite de l'infini du plan (P) sera la perspective d'une certaine droite réelle (Δ) du plan (ϖ) ; aux points à l'infini de (C) correspondent ainsi les points d'intersection de (Γ) et de (Δ), et aux asymptotes de (C), les tangentes en ces points d'intersection, qui ne se confondent pas avec (Δ).

Soit μ l'un de ces points d'intersection, supposé réel. Si μ est un point d'ordre un de la courbe (Γ), il passe en μ une branche réelle de cette courbe, qui admet une tangente réelle $\mu\tau$. Si $\mu\tau$ est distincte

de (Δ), sa perspective sera une droite du plan (P) à distance finie, asymptote à la branche de la courbe (C), déduite par perspective de l'arc de (Γ) qui avoisine le point M. Si $\mu\tau$ se confond avec (Δ), cette branche de la courbe (C) ne présente pas d'asymptote et on lui donne le nom de *branche parabolique.*

Nous avons fait la figure en supposant la tangente $\mu\tau$ distincte de (Δ): elle nous montre en outre la disposition la plus habituelle d'une courbe algébrique par rapport à son asymptote, qui consiste en deux portions situées de part et d'autre de cette droite; il en est ainsi lorsque la branche infinie étudiée provient par perspective d'un arc



$\mu_1\,\mu\,\mu_2$ qui ne traverse pas sa tangente en μ. Si μ est par contre un point d'inflexion de cet arc, la branche infinie obtenue en perspective comprendra deux portions situées d'un même côté de l'asymptote.

Supposons maintenant que μ soit un point d'ordre deux de la courbe (Γ). Il peut être isolé, et alors ne donner naissance pour (C) à aucune branche infinie ni asymptote réelle. Ou bien c'est un véritable point double; si les tangentes aux arcs qui se croisent en μ sont distinctes de (Δ), leurs perspectives sont deux droites à distance finie, asymptotes chacune à une branche réelle de la courbe (C). Si l'une de ces tangentes se confond avec (Δ), il en résulte pour (C) une branche parabolique. Supposons enfin qu'en μ le faisceau des tangentes à (Γ) se réduise à une droite double $\mu\tau$. La courbe (Γ) présente en μ ou un rebroussement, ou deux arcs simples tangents à $\mu\tau$, ou un point isolé. Écartant le cas de branches paraboliques, supposons encore la perspective de $\mu\tau$ à distance finie; cette droite constituera une

asymptote double de la courbe (C). Mais il est à remarquer qu'il ne lui correspondra pas toujours de branche réelle, μ pouvant être le point de contact, isolé, d'une tangente double réelle à (Γ). Nous comprenons ainsi un fait que l'on rencontre dans les exemples numériques : l'absence de branches réelles de courbe correspondant à une asymptote double.

Plus généralement, supposons que μ soit d'ordre p sur (Γ). Le nombre des arcs réels de (Γ) qui se croisent en μ a même parité que p. Si certains de ces arcs ont des tangentes multiples, celles-ci donneront naissance, tant qu'elles sont distinctes de (Δ), à des asymptotes multiples. Nous sommes maintenant prévenus qu'une asymptote multiple de (C) peut ne correspondre à aucune branche réelle de cette courbe ; cette circonstance ne se produit toutefois que si l'ordre de multiplicité de cette asymptote est pair.

81. Recherche pratique des asymptotes. — On prend d'abord les directions asymptotiques réelles, qui seules peuvent fournir des asymptotes réelles.

On procède ensuite, s'il y a lieu, *à la recherche des asymptotes parallèles aux axes*. Soit à trouver les asymptotes parallèles à Oy de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Pour trouver les valeurs de y qui correspondent à une valeur donnée de x, ordonnons cette équation par rapport à y. Une droite $x = x_0$ sera une asymptote si pour la valeur x_0 le degré de cette équation en y se trouve abaissé. D'où ce théorème :

On obtient les asymptotes parallèles à Oy en annulant, dans l'équation de la courbe ordonnée en y, le coefficient de la plus haute puissance de y.

Bien entendu, on ne prend que les racines réelles de cette équation, et on est prévenu que celles qui seraient multiples d'ordre pair peuvent très bien ne correspondre à aucune branche réelle de courbe. Il en sera ainsi de la droite $x = a$, en supposant a positif, pour la courbe

$$x(x-a)^2y^2 + a^5 = 0.$$

Cherchons maintenant les asymptotes non parallèles à Oy. Leurs coefficients angulaires ne peuvent être que les racines de

l'équation

$$\varphi_m(1, t) = 0.$$

Soit c une racine réelle de cette équation. Posons

$$y = cx + u.$$

L'équation obtenue en remplaçant dans celle de la courbe, y par cette valeur, est

$$(1) \qquad f(x, cx + u) = 0.$$

Elle donne les abscisses des points de rencontre de la courbe et de la parallèle à

$$y = cx$$

dont l'ordonnée à l'origine est u. Quand u est choisi au hasard, le degré de l'équation (1) est la différence de l'ordre de la courbe et de l'ordre sur cette courbe du point à l'infini de la direction $y = cx$. Pour qu'il existe une asymptote parallèle à $y = cx$, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer u de manière à abaisser ce degré. D'où ce théorème :

On obtient les asymptotes de coefficient angulaire c en annulant, dans l'équation (1) *ordonnée par rapport à x, le coefficient de la plus haute puissance de x.*

Bien entendu, on ne prend que les racines réelles de l'équation ainsi obtenue, et on se méfie, comme précédemment, des racines doubles ou d'ordre pair.

Remarque. — Si c est une racine simple de l'équation

$$(2) \qquad \varphi_m(1, t) = 0,$$

on dit que la direction asymptotique qui lui correspond est simple ; si c est racine double de cette équation, on dit de même que cette direction est double, etc... Une direction asymptotique réelle simple correspond à un point simple à l'infini de la courbe (C). La tangente en ce point n'est pas la droite de l'infini, sinon ce point compterait pour deux unités dans le recensement des points d'intersection de (C) et de cette droite, par suite la direction asymptotique de coefficient c serait double. Il s'ensuit qu'une direction asymptotique simple réelle donne toujours naissance à une asymptote simple réelle, munie d'une branche réelle de courbe.

Si c est racine double de l'équation (2), cela provient, ou bien du

contact de la courbe avec la droite de l'infini au point à l'infini de $y = cx$, qui est un point simple, ou bien du fait que le point à l'infini de $y = cx$ est un point d'ordre deux de la courbe. La première circonstance conduit à une branche parabolique; la seconde peut donner lieu à plusieurs cas : soit à l'absence de branches réelles dans la direction $y = cx$, soit à l'existence de deux branches réelles, munies chacune d'une asymptote parallèle à cette direction, soit à l'existence d'une asymptote double, accompagnée ou non de branches réelles de courbe.

Exemple. — Soit à trouver les asymptotes de

$$(y - x)^2(y + 2x) + (y - \lambda x)y + \mu x = 0.$$

Prenons d'abord la direction asymptotique simple

$$y + 2x = 0.$$

Coupons la courbe par la droite

$$y + 2x = u,$$

parallèle à cette direction. Les abscisses des points de rencontre sont les racines de l'équation

$$u(u - 3x)^2 + [u - (2 + \lambda)x](u - 2x) + \mu x = 0.$$

Pour avoir l'asymptote, il suffit d'annuler le coefficient de x^2, ce qui donne

$$9u + 2(2 + \lambda) = 0,$$

ce qui donne l'asymptote

$$9(y + 2x) + 2(2 + \lambda) = 0.$$

Prenons maintenant la direction asymptotique double

$$y - x = 0,$$

et la sécante parallèle,

$$y - x = u.$$

Les abscisses des points de rencontre sont données par

$$u^2(u + 3x) + [u + (1 - \lambda)x](u + x) + \mu x = 0.$$

Cette équation est du second degré en x si λ n'est pas égal à 1. Le coefficient de x^2 est alors la constante $1 - \lambda$, qu'il est impossible d'annuler : dans ce cas, pas d'asymptote parallèle à la première bissectrice ; les branches infinies étudiées sont paraboliques.

Dans le cas où $\lambda = 1$, l'équation précédente se réduit au premier degré en x et le coefficient de x est

$$3u^2 + u + \mu.$$

Pour obtenir les asymptotes, il faut annuler ce trinome en u. Il y aura deux asymptotes réelles et distinctes, munies de branches réelles, pourvu que μ soit moindre que $\frac{1}{12}$. Pour $\mu=\frac{1}{12}$, ces asymptotes se confondent suivant la droite $y=x-\frac{1}{6}$. Comme x est ici une fonction rationnelle de u, il n'y a aucune difficulté à vérifier qu'il correspond à cette asymptote double deux branches réelles de courbe, qui forment d'ailleurs un rebroussement à l'infini.

III. — Points communs à deux courbes algébriques d'un même plan.

82. Nous ferons d'abord sur les courbes étudiées des hypothèses qui ne restreignent la généralité qu'en apparence. Nous supposerons que ces courbes soient définies, en coordonnées non homogènes, par les deux équations

$$f(x, y)=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots=0, \tag{1}$$
$$g(x, y)=x^p+B_1x^{p-1}+B_2x^{p-2}+\ldots=0, \tag{2}$$

où les A et les B sont des polynomes en y d'un degré égal à leur indice

$$\begin{aligned} A_1&=a_1y+a_1', & B_1&=b_1y+b_1',\\ A_2&=a_2y^2+a_2'y+a_2'', & B_2&=b_2y^2+b_2'y+b_2'',\\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

de sorte que les ordres de nos courbes sont respectivement m et p.

La forme des équations (1) et (2) implique que Ox n'est direction asymptotique pour aucune d'elles. Nous supposerons en outre que nos courbes n'admettent pas de direction asymptotique commune, ou, ce qui revient au même, pas de point commun à l'infini. La première de ces hypothèses dépend du choix des axes, et il n'y a qu'un nombre fini de directions données de Ox qui ne la réalisent pas; la seconde porte par contre sur l'ensemble des deux courbes, indépendamment des axes auxquels on les rapporte, et nous apprendrons plus loin à lever la restriction qu'elle introduit.

Cela posé, à chaque valeur de y, l'équation (1) fait correspondre m valeurs de x, soient $u_1, u_2, \ldots, u_m$, et l'équation (2), p valeurs, soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Pour que y soit l'ordonnée d'un point commun aux deux courbes, il faut et il suffit que, pour cette valeur, l'un des nombres u soit égal à l'un des nombres v, ou encore qu'on ait une

des deux égalités suivantes

$$(3) \qquad f(v_1, y)f(v_2, y)\dots f(v_p, y) = 0,$$
$$(4) \qquad g(u_1, y)g(u_2, y)\dots g(u_m, y) = 0.$$

Au signe près, les deux premiers membres sont d'ailleurs égaux séparément au produit

$$\Pi(u_h - v_k)$$

formé de mp facteurs dont chacun est la différence d'une racine de l'équation (1) et d'une racine de l'équation (2). La valeur R de l'un de ces premiers membres s'appelle le *résultant* des équations (1) et (2). Dans ces équations, considérons un instant les A et les B, non plus comme des fonctions de y, mais comme des paramètres indépendants. Sous la forme (3), nous voyons que R est un polynome par rapport aux A ; la forme (4) nous montre de même que R est un polynome par rapport aux B. Nous avons donc

$$R = \varphi(A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_p),$$

φ désignant un polynome entier. Quand, dans cette expression, on remplace à nouveau les A et B par leurs expressions en fonction de y, on obtient un polynome en y, soit $R(y)$. Le terme de plus haut degré de $R(y)$ est égal à celui du polynome obtenu en réduisant dans φ les A et les B à leurs premiers termes, c'est-à-dire en y remplaçant

$$A_1, A_2, \dots, A_m \qquad \text{et} \qquad B_1, B_2, \dots, B_p,$$

respectivement, par

$$a_1y, a_2y^2, \dots, a_my^m \qquad \text{et} \qquad b_1y, b_2y^2, \dots, b_py^p.$$

Cela se ramène encore à dire que *le terme de plus haut degré de* $R(y)$ *n'est pas altéré si l'on réduit les polynomes* $f(x, y)$ *et* $g(x, y)$ *à leurs fonctions homogènes de plus haut degré*. Si celles-ci sont respectivement

$$(x - s_1y)(x - s_2y)\dots(x - s_my),$$
$$(x - t_1y)(x - t_2y)\dots(x - t_py),$$

leur résultant est manifestement

$$y^{mp}\Pi(s_h - t_k).$$

D'après notre seconde hypothèse, le coefficient de y^{mp} n'est pas nul. Donc le résultant des polynomes $f(x, y)$ et $g(x, y)$ est aussi de degré mp [1].

---

[1] On pourrait encore présenter le raisonnement sous la forme suivante : si l'on modifie $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sans toucher à leurs fonctions homogènes de plus haut degré, le degré du résultant n'est pas altéré. On peut donc se ramener au cas où chaque courbe serait décomposée en un système de m ou p

L'équation $R(y) = 0$, qui vient d'être considérée, définit les projections des points d'intersection de nos deux courbes sur l'axe Oy. Or nous avons déjà remarqué que, sans enfreindre l'hypothèse que Ox n'est direction asymptotique d'aucune de nos courbes, nous pouvions adopter une infinité de choix de Oy. Nous dénommerons les directions correspondantes : *directions permises de* Oy.

Il en résulte que nous pouvons énoncer le théorème suivant : ***Deux courbes algébriques, d'ordres m et p, sans point commun à l'infini, ont mp points communs à distance finie.***

83. Nous sommes, du moins, certains de ce résultat, lorsque le résultant $R(y)$ a toutes ses racines distinctes ; il est alors évident que les courbes ont au moins *mp* points communs distincts, et qu'elles n'en peuvent avoir plus : car nous pourrions trouver, dans ce cas, une direction permise d'axe Oy, sur laquelle les points communs donneraient plus de *mp* projections distinctes, ce qui est contraire aux résultats du raisonnement précédent.

Toutefois, il nous reste à étudier le cas où plusieurs de nos points d'intersection viendraient à se confondre. L'énoncé du théorème précédent n'acquerra toute sa généralité que si nous sommes à même de définir le nombre d'unités pour lequel un point commun aux deux courbes figurera dans le recensement final. Soit (x_0, y_0) un tel point commun : au nombre d'unités que nous devons lui assigner dans ce dénombrement, nous donnerons, dans une nouvelle acception, le nom d'*ordre* de la solution x_0, y_0.

La réponse à cette question est simple : si, parmi les directions permises de Oy, nous en prenons une qui ne soit pas perpendiculaire aux droites joignant deux à deux les points d'intersection, des points distincts auront sur Oy des projections distinctes : l'ordre de la solution x_0, y_0 sera alors fourni par l'ordre de multiplicité de la racine y_0 de l'équation

$$R(y) = 0.$$

Mais on peut éviter d'imposer de nouvelles conditions à Oy en opérant de la manière suivante : nous allons déterminer les projections sur Oy des points d'intersection, en adoptant comme direction des projetantes, non plus exclusivement celle de l'axe Ox, mais bien

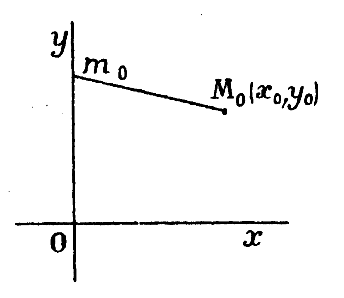
---

droites. Le nombre des points communs aux droites du 1[er] système et à celles du 2[e] étant *mp* (on a d'ailleurs la latitude de les supposer distincts, puisque l'on n'impose que la direction de chaque droite), on en déduit aisément le résultat précédent.

une direction de coefficient angulaire indéterminé. Posons à cet effet

$$(5) \qquad y + \alpha x = z;$$

cette équation définit une droite de coefficient angulaire $-\alpha$, qui admet z pour ordonnée à l'origine. Si M_0 est un de nos points d'intersection, en posant



$$y_0 + \alpha x_0 = z_0,$$

z_0 représente donc le segment $\overline{Om_0}$ obtenu en projetant sur Oy le point M_0 parallèlement à la direction de coefficient angulaire $-\alpha$.

Effectuons la transformation (5). Les équations de nos courbes deviennent

$$f(x, z - \alpha x) = 0,$$
$$g(x, z - \alpha x) = 0.$$

Entre ces équations, éliminons x. Nous obtenons une équation

$$(6) \qquad \varphi(z, \alpha) = 0,$$

qui est de degré mp en z. Ses racines sont des fonctions linéaires de α, dans lesquelles le terme constant est l'ordonnée d'un point d'intersection, le coefficient de α représentant l'abscisse de ce point.

Cela posé, il est maintenant naturel de définir l'ordre de la solution x_0, y_0 comme l'ordre de multiplicité de la racine

$$y_0 + \alpha x_0$$

de l'équation (6).

Moyennant cette définition, on aperçoit immédiatement la généralité du théorème précédent, connu sous le nom de théorème de Bezout.

84. En nous plaçant au point de vue infinitésimal, nous pouvons compléter cette définition arithmétique de l'ordre, en établissant le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que les coefficients a et b, qui interviennent dans les équations*

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

soient des fonctions continues d'un paramètre λ. Si pour $\lambda = \lambda_0$, le système admet x_0, y_0 comme solution d'ordre p, il y a p points de rencontre

des deux courbes qui tendent vers le point (x_0, y_0) *lorsque* λ *tend vers* λ_0.

En effet, le résultant $\rho(z, \alpha)$, précédemment formé, aura lui-même pour coefficients des fonctions continues de λ. En appliquant le théorème de la continuité des racines d'une équation algébrique à une seule inconnue, nous obtenons donc le résultat annoncé.

Ce théorème nous conduit à d'intéressantes conséquences. Il nous montre que x_0, y_0 ne peut être *solution simple* du système $f=0$, $g=0$, qu'à la condition que ce point soit simple sur chacune de nos courbes, et, en outre, qu'en ce point il n'y ait pas tangence. Il est donc nécessaire que l'on ait

$$f'_{y_0}g'_{x_0} - f'_{x_0}g'_{y_0} \neq 0.$$

Réciproquement, on démontre que si cette condition est remplie, le point (x_0, y_0) fournit bien une solution simple.

Un système $f=0$, $g=0$ qui admet des solutions multiples peut toujours être regardé comme la limite d'un système de même forme qui n'admet que des solutions simples. Bornons-nous à signaler que le système

$$f=\varepsilon, \qquad g=0$$

n'admet que des racines simples pour les valeurs infiniment petites de ε (1).

Supposons qu'un point (x_0, y_0), commun aux courbes

$$(1) \qquad f(x, y)=0, \qquad (2) \qquad g(x, y)=0$$

soit d'ordre un sur chacune d'elles. Le choix des axes étant tel que l'on ait

$$f'_{y_0} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad g'_{y_0} \neq 0;$$

l'équation (1) définit une fonction implicite

$$y=\varphi(x),$$

qui tend vers y_0 quand x tend vers x_0. L'équation (2) définit une deuxième fonction implicite

$$y=\psi(x)$$

possédant la même propriété. Pour que x_0, y_0 soit solution du système (1), (2) à l'ordre de multiplicité p, on démontre que ces fonctions doivent admettre les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusive-

---

(1) Ou bien les courbes $g=0$ et $f'_y g'_x - f'_x g'_y = 0$ possèdent un nombre fini de points d'intersection et le théorème est évident, puisque f prend en ces points un nombre fini de valeurs, ou bien ces deux courbes, se décomposant (nº 85), ont une partie commune. Mais sur cette courbe commune, f est constant, et par suite, on a encore, en tous les points communs, un nombre fini de valeurs de f.

ment. Cette condition est nécessaire et suffisante : nous l'admettrons.

Si $p = 2$, on dit que les courbes sont *simplement tangentes* ; si $p = 3$, on dit qu'elles sont *osculatrices* ; si $p = 4$, qu'elles sont *surosculatrices*. En général, on dit que $p - 1$ est l'ordre du contact des deux courbes.

Remarque. — Si x_0, y_0 est une solution d'ordre deux du système (1), (2), on ne peut en déduire le contact des courbes en ce point que s'il est simple sur chacune d'elles. Le point (x_0, y_0) est encore une solution d'ordre deux s'il est simple pour l'une des courbes, double pour l'autre, les tangentes à la seconde étant distinctes de la tangente à la première.

85. Courbes ayant une partie commune. — Pour réaliser cette circonstance, nous sommes obligés de renoncer à l'hypothèse, que nous avons faite jusqu'à présent, et suivant laquelle les courbes données n'ont pas de direction asymptotique commune. Dans ces conditions nouvelles, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Si les deux courbes*

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

ont plus de mp points communs, elles se décomposent, et l'on peut écrire

$$f(x, y) = \Delta(x, y) f_1(x, y),$$
$$g(x, y) = \Delta(x, y) g_1(x, y),$$

les courbes $f_1 = 0$ et $g_1 = 0$ ayant en commun un nombre fini de points.

Choisissons encore Ox de manière qu'il ne soit direction asymptotique d'aucune de nos courbes ; dès lors nous sommes sûrs qu'elles n'ont pas en commun de droite parallèle à Ox. Cela posé, l'élimination de x entre leurs équations donne un résultant $R(y)$ de degré mp au plus et ayant plus de mp racines. Donc $R(y)$ est identiquement nul ; cela signifie que, pour chaque valeur de y, nos équations sont vérifiées simultanément par une ou plusieurs valeurs de x. Donc les polynomes en x constitués par $f(x, y)$ et $g(x, y)$ admettent un p. g. c. d. $D_y(x)$ entier en x et rationnel en y, soit

$$D_y(x) = \frac{\Delta(x, y)}{\varphi(y)},$$

$\Delta(x, y)$ étant un polynome qui ne contient en facteur, en vertu de

l'hypothèse, aucun polynome dépendant de y seul. Or, considéré comme polynome en x, $\Delta(x, y)$ divise $f(x, y)$ et $g(x, y)$, quel que soit y. Les quotients étant entiers en x et rationnels en y, on peut donc écrire

$$f(x, y) = \Delta(x, y)\frac{f_1(x, y)}{P(y)}, \qquad g(x, y) = \Delta(x, y)\frac{g_1(x, y)}{Q(y)},$$

P et Q étant des polynomes en y, f_1 et g_1 des polynomes en x et y. Les fractions $\frac{f_1}{P}$ et $\frac{g_1}{Q}$ étant supposées irréductibles, il est nécessaire que leurs dénominateurs soient des constantes. Sinon, à une racine y_0 de P, par exemple, on pourrait associer une valeur x_0 telle que, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = 0,$$

ni f_1, ni Δ ne s'annulent. Le polynome f deviendrait infini, ce qui est absurde. Donc, nous pouvons écrire maintenant

$$f(x, y) \equiv \Delta(x, y)f_1(x, y),$$
$$g(x, y) \equiv \Delta(x, y)g_1(x, y).$$

D'après le mode de formation de Δ, il est d'ailleurs évident que sauf pour des valeurs de y en nombre fini, les polynomes $f_1(x, y)$ et $g_1(x, y)$ sont premiers entre eux ; comme ils ne peuvent avoir de diviseur commun dépendant de y seul, les courbes

$$f_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad g_1 = 0$$

ont un nombre fini de points communs.

86. Énoncé du théorème général. — *Deux courbes algébriques quelconques indécomposées, d'ordres respectifs m et p, ont mp points communs réels ou imaginaires, distincts ou non, à distance finie ou à l'infini.*

Il suffit de montrer que les courbes données (C) et (C′) peuvent toujours être regardées comme les perspectives de deux courbes (γ) et (γ') sans direction asymptotique commune. Etant indécomposées, (C) et (C′) ont en effet un nombre fini de points de rencontre, et on peut toujours mener une droite qui ne passe par aucun de ces points. Il suffit alors de s'arranger de manière que cette droite soit la perspective de la droite de l'infini du plan (ϖ) des courbes (γ) et (γ').

Le théorème est donc établi.

Soient

$$F(X, Y, T) = 0, \qquad G(X, Y, T) = 0$$

les équations homogènes des deux courbes (C) et (C′). Nous pouvons

aussi donner une autre interprétation du résultat précédent, en remarquant (nº 46) que les équations

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad G(x, y, z) = 0$$

représentent, par rapport à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, deux cônes de sommet O. Nous aurons le théorème suivant :

Deux cônes de même sommet, d'ordres respectifs m et p, ont en général mp génératrices communes. S'ils en ont davantage, ils se décomposent et ont en commun un cône de sommet O et d'ordre au plus égal au plus petit des deux nombres m et p.

87. Faisceau des droites qui joignent un point donné aux points communs à deux courbes algébriques. — Soit $M_0(X_0, Y_0, T_0)$ le point donné. Cherchons le faisceau des droites qui joignent ce point aux points de rencontre des deux courbes algébriques

$$F(X, Y, T) = 0, \qquad G(X, Y, T) = 0.$$

Appelons x, y, t les coordonnées homogènes d'un point m du lieu ; nous devons exprimer que la droite M_0m contient un point $M(X, Y, T)$ commun à nos deux courbes, ou, puisque tout point de cette droite a des coordonnées de la forme

$$X_0 + \Lambda x, \qquad Y_0 + \Lambda y, \qquad T_0 + \Lambda t,$$

nous devons écrire que les deux équations

$$F(X_0 + \Lambda x, Y_0 + \Lambda y, T_0 + \Lambda t) = 0,$$
$$G(X_0 + \Lambda x, Y_0 + \Lambda y, T_0 + \Lambda t) = 0$$

ont une racine commune en Λ. Cette élimination nous fournira une équation, qui est celle du faisceau de droites cherché; son degré est mp si M_0 n'est pas l'un des points communs à nos deux courbes.

Supposons en particulier que l'on ait $X_0 = Y_0 = 0$, c'est-à-dire que le point M_0 soit précisément l'origine, les équations précédentes, après division par Λ^m et Λ^p, deviennent

$$(1) \qquad \begin{cases} F\left(x, y, \dfrac{T_0 + \Lambda t}{\Lambda}\right) = 0, \\ G\left(x, y, \dfrac{T_0 + \Lambda t}{\Lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

qu'on peut écrire tout simplement

$$(2) \qquad \begin{cases} F(x, y, t_1) = 0, \\ G(x, y, t_1) = 0. \end{cases}$$

On obtient évidemment des résultats identiques en éliminant Λ entre les équations (1) ou t_1 entre les équations (2). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant, important dans les applications :

On obtient le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points communs à deux courbes du plan xOy en éliminant, entre les équations homogènes de ces courbes, la variable d'homogénéité.

Bien entendu, on obtient ainsi simultanément les droites qui joignent le point O aux points communs à distance finie, aussi bien qu'aux points communs à l'infini. Lorsqu'un point commun est multiple d'un certain ordre, et qu'on suppose M_0 indéterminé, la droite joignant M_0 à ce point commun est multiple du même ordre.

IV. — Courbes algébriques de l'espace.

88. Dans l'espace, on nomme *courbes algébriques* toutes les courbes auxquelles peut donner naissance l'intersection de deux surfaces algébriques.

Considérons deux surfaces algébriques indécomposées, d'ordres respectifs m et p, représentées en coordonnées homogènes par les équations

$$F(X, Y, Z, T) = 0, \qquad G(X, Y, Z, T) = 0.$$

Un plan quelconque coupe la première suivant une courbe d'ordre m, la seconde suivant une courbe d'ordre p, qui, sauf peut-être pour des positions exceptionnelles en nombre fini du plan ([1]), ont un nombre fini, égal à mp, de points communs. Si donc un point S_0 n'appartient pas à la fois aux deux surfaces, le cône de sommet S_0 qui s'appuie sur leur intersection sera coupé par un plan contenant S_0 suivant mp droites, et, par suite, sera d'ordre mp. Il est d'ailleurs facile d'écrire l'équation de ce cône. Pour qu'un point de coordonnées homogènes X, Y, Z, T en fasse partie, il faut et il suffit que la droite joignant le point

$$S_0(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$$

([1]) Nous faisons ici allusion au cas où nos surfaces auraient en commun une ou plusieurs courbes planes.

au point (X, Y, Z, T) contienne un point

$$X_0 + \Lambda X, \qquad Y_0 + \Lambda Y, \qquad Z_0 + \Lambda Z, \qquad T_0 + \Lambda T$$

situé à la fois sur les deux surfaces, ou encore que les équations

$$F(X_0 + \Lambda X, Y_0 + \Lambda Y, Z_0 + \Lambda Z, T_0 + \Lambda T) = 0,$$
$$G(X_0 + \Lambda X, Y_0 + \Lambda Y, Z_0 + \Lambda Z, T_0 + \Lambda T) = 0$$

admettent une racine commune en Λ. Donc *l'équation du cône cherché s'obtient en éliminant Λ entre les deux équations précédentes.*

Soit

$$\varphi(X, Y, Z, T; X_0, Y_0, Z_0, T_0) = 0$$

l'équation ainsi obtenue (1). Il nous est permis de considérer qu'elle définit (surabondamment d'ailleurs) la courbe d'intersection de nos deux surfaces, étant entendu que X_0, Y_0, Z_0, T_0 sont regardées comme des quantités arbitraires ; en somme, elle exprime la condition pour qu'une droite M_0M rencontre la courbe.

Si, le point S_0 étant choisi au hasard, le cône précédent ne se décompose pas, nous dirons qu'il en est de même de la courbe d'intersection : il est alors immédiat, d'après le raisonnement précédent, qu'un plan quelconque la coupe en mp points. Si pour des positions particulières de S_0, il y a décomposition du cône, il est facile de démontrer que, pour les valeurs X_0, Y_0, Z_0, T_0 envisagées, φ devient une puissance entière d'un polynome en X, Y, Z, T, chaque génératrice simple du cône rencontrant la courbe en un nombre de points égal à l'exposant de cette puissance.

Supposons maintenant que φ se décompose quel que soit le point S_0, c'est-à-dire qu'on ait une identité de la forme

$$\varphi \equiv \psi_1^{\alpha_1}\psi_2^{\alpha_2}\cdots\psi_n^{\alpha_n},$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ étant des polynomes de même forme que φ, mais cette fois indécomposables. Il est bien entendu que cette identité doit avoir lieu quel que soit le point S_0. Chacune des égalités

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots. \qquad \psi_n = 0$$

représente un cône, de sommet arbitraire, mais passant par une courbe fixe. Appelons (C_1), (C_2), ..., (C_n) les courbes ainsi obtenues. L'intersection est décomposée, et comprend les courbes algébriques

(1) Comme exercice, nous proposons à l'élève de montrer que φ est un polynome homogène par rapport aux six quantités :

$$XT_0 - TX_0, \qquad YT_0 - TY_0, \qquad ZT_0 - TZ_0,$$
$$YZ_0 - ZY_0, \qquad ZX_0 - XZ_0, \qquad XY_0 - YX_0.$$

(C_1), (C_2), ... (C_n), aux ordres respectifs α_1, α_2 ...., α_n de multiplicité. Chacune de ces courbes est d'ailleurs surabondamment déterminée par le cône de sommet (X_0, Y_0, Z_0, T_0) arbitraire, qui la contient. On en déduit aisément qu'elle est coupée par un plan en un nombre constant de points, égal à l'ordre de ce cône. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Qu'une courbe algébrique soit ou non (¹) *l'intersection complète de deux surfaces, le nombre de ses points de rencontre avec un plan est un nombre constant, qu'on appelle l'ordre de cette courbe.*

Dans ce dénombrement, si, un plan étant mené au hasard par un point, ce point intervient pour plusieurs unités, ce nombre s'appelle *l'ordre du point sur la courbe.* Il est facile d'établir les propositions suivantes, que nous nous contenterons d'énoncer :

Si un point M_0 appartient à la fois aux deux surfaces qui donnent naissance à la courbe algébrique étudiée, il est d'ordre un sur cette courbe, pourvu qu'il soit d'ordre un sur chacune des surfaces, et qu'en ce point, les plans tangents aux deux surfaces soient différents.

Si, le point M_0 étant d'ordre un pour chacune des surfaces, les plans tangents en ce point coïncident, M_0 est, pour l'intersection, un point d'ordre deux, ou d'ordre supérieur. Le point M_0 est encore d'ordre supérieur à un, pour l'intersection, s'il est d'ordre supérieur à un sur chacune des surfaces.

Si une courbe d'ordre m admet un point A d'ordre m, n'importe quel plan joignant le point A à tout autre point P de cette courbe possède avec elle une infinité de points communs. Donc la droite AP fait partie de cette courbe. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute courbe admettant un point multiple dont l'ordre atteint celui de la courbe elle-même est décomposée en autant de droites qu'il y a d'unités dans cet ordre.

Voici une autre application de la notion d'ordre :

Toute courbe indécomposée d'ordre m qui admet un point multiple d'ordre $m - 1$ est plane.

Soient A ce point multiple, P et Q deux autres points pris arbitrairement sur la courbe. Le plan APQ ayant plus de m points communs avec la courbe, celle-ci est plane.

Il en résulte en particulier que toute courbe du second ordre est plane.

(¹) Bon gré, mal gré, il faut bien se résigner à examiner le cas où une courbe algébrique n'est pas l'intersection complète de deux surfaces : il est évident en effet qu'une courbe algébrique d'ordre premier ne saurait réaliser à elle seule une telle intersection.

89. Points communs à trois surfaces. — Trois surfaces

$$F(X, Y, Z, T) = 0, \qquad G(X, Y, Z, T) = 0, \qquad H(X, Y, Z, T) = 0$$

peuvent, d'après ce qui précède, avoir en commun une courbe algébrique sans pour cela se décomposer. Ainsi, la courbe, déjà considérée (n° 62), et représentée par

$$(C) \qquad x = \frac{1}{t-\alpha}, \qquad y = \frac{1}{t-\beta}, \qquad z = \frac{1}{t-\gamma},$$

appartient à la fois aux trois surfaces définies, en coordonnées non homogènes, par les équations

$$(\gamma - \beta)yz + y - z = 0,$$
$$(\alpha - \gamma)zx + z - x = 0,$$
$$(\beta - \alpha)xy + x - y = 0.$$

Nous avons ainsi un exemple de trois surfaces du second ordre qui ont en commun une infinité de points répartis sur la courbe (C).

Faisons l'hypothèse suivante : les trois surfaces considérées n'ont pas de courbe algébrique commune. On peut alors démontrer le théorème suivant :

Si m, n, p sont les ordres respectifs des trois surfaces, le nombre de leurs points communs est mnp.

90. Nombre des points communs à une courbe algébrique quelconque et à une surface. — Dans son *Mémoire sur les courbes gauches algébriques*, Halphen indique la possibilité de ramener toute courbe gauche, par l'adjonction de droites convenables, à constituer, avec ces droites, l'intersection complète de deux surfaces ([1]). Dans ces conditions, l'énoncé du n° précédent entraîne immédiatement le suivant :

([1]) Voyez l'année 1882 du *Journal de l'École Polytechnique*. — Indiquons sommairement le moyen de réaliser cette adjonction. Considérons une courbe algébrique (C), commune aux deux surfaces représentées par les équations non homogènes

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Supposons que les axes aient été choisis de telle sorte que chaque parallèle à Oz qui s'appuie sur la courbe la rencontre en un seul point sauf pour des positions exceptionnelles, en nombre fini, qui correspondent aux points multiples apparents de la projection sur le plan xOy. Soit

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

l'équation de cette projection. Lorsque x et y sont liés par la relation (1), les équations $f = 0$, $g = 0$ ont une racine commune en z, qui est unique, sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs x, y. D'après la théorie du

Une courbe algébrique d'ordre m possède avec une surface d'ordre p, mp points communs.

V. — Courbes unicursales.

91. Toute courbe dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t est manifestement une courbe algébrique. On donne le nom de *courbes unicursales* à toutes les courbes algébriques du plan et de l'espace qui admettent un tel mode de représentation paramétrique. Cette possibilité est, nous le montrerons, spéciale à certaines courbes, et elle est d'ailleurs (l'élève le fera voir) indépendante du choix des axes.

92. Courbes unicursales du plan. — Considérons une courbe unicursale du plan xOy, soit

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

Les fractions f et g ayant été réduites au dénominateur commun de moindre degré, supposons que cela nous ait donné

$$x = \frac{P(t)}{S(t)}, \qquad y = \frac{Q(t)}{S(t)}.$$

Si à un point de la courbe correspond une seule valeur de t,

---

p. g. c. d., cette racine peut s'exprimer rationnellement en fonction de x, y, soit

$$(2) \qquad z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

son expression. Considérons les surfaces représentées par les équations (1) et (2). Elles ont en commun la courbe considérée : en dehors de cette courbe, leur intersection ne comprend que des génératrices du cylindre projetant, correspondant à des solutions communes aux trois équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0.$$

Ce fait est pour ainsi dire intuitif : pour le démontrer en toute rigueur, désignons par m l'ordre de notre courbe, qui est aussi celui du polynome φ, et par p l'ordre de la surface définie par l'équation (2). Les surfaces (1) et (2) se coupent suivant la courbe (C) et un système de courbes dont la somme des ordres est $m(p-1)$; le point à l'infini sur Oz est d'ailleurs un point d'ordre m pour la surface (1), d'ordre $p-1$ pour la surface (2). Donc il est au moins d'ordre $m(p-1)$ pour la partie supplémentaire de l'intersection, qui, d'après un théorème du texte, se réduit à un système de droites.

exception faite pour un nombre fini de points, autrement dit, si pour un point (x, y), pris au hasard sur la courbe, les équations

$$xS(t) - P(t) = 0, \qquad yS(t) - Q(t) = 0$$

ont une seule racine commune en t, on dit qu'on est en présence d'une *représentation propre*. Prenons alors une droite arbitraire

$$ux + vy + w = 0.$$

L'équation qui donne les t de ses points de rencontre avec la courbe, soit

$$uP(t) + vQ(t) + wS(t) = 0,$$

a pour degré le plus élevé des degrés des trois polynomes P, Q, S. Puisque des racines distinctes fournissent en général des points distincts, on peut donc énoncer le théorème suivant :

L'ordre de la courbe est le plus grand des degrés des polynomes P, Q, S, *pourvu qu'ils correspondent à une représentation propre de cette courbe.*

93. Envisageons le système suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{P(t_1)}{S(t_1)} = \dfrac{P(t_2)}{S(t_2)}, \\[2mm] \dfrac{Q(t_1)}{S(t_1)} = \dfrac{Q(t_2)}{S(t_2)}. \end{cases}$$

Si la représentation est impropre, cette circonstance nous sera révélée par le fait qu'à une valeur quelconque t_1 nous pourrons associer une valeur t_2 distincte, satisfaisant au système (1). Sinon, la résolution de ce système par des nombres t_1 et t_2 distincts nous fournira les points doubles de la courbe. Plus généralement, s'il existe h valeurs de t faisant acquérir la même valeur à chacune des fonctions f et g, nous serons avertis de la présence d'un point multiple d'ordre h. Ainsi, la recherche des points multiples, d'une part, et le fait de reconnaître si la représentation est propre, d'autre part, donnent lieu, en définitive, au même calcul.

Pour résoudre le système (1), on est amené à rendre ses équations entières, et à l'écrire sous la forme

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} P(t_1)S(t_2) - P(t_2)S(t_1) = 0, \\ Q(t_1)S(t_2) - Q(t_2)S(t_1) = 0. \end{cases}$$

Si l'on supprime dans chaque premier membre le facteur $t_1 - t_2$, il y subsiste un polynome entier, symétrique en t_1 et t_2, ou encore un polynome en s et p, en posant

$$s = t_1 + t_2, \qquad p = t_1 t_2.$$

On est ainsi conduit à un nouveau système

$$(2) \qquad \begin{cases} F(s, p) = 0, \\ G(s, p) = 0. \end{cases}$$

La représentation sera propre si les courbes définies dans le plan des s, p par ces deux équations n'ont qu'un nombre fini de points communs. Supposons qu'il en soit ainsi : soit s, p une solution du système (2). Les deux valeurs de t définies par l'équation

$$(3) \qquad t^2 - ts + p = 0$$

satisfont au système (1bis). Supposons qu'*on se place uniquement au point de vue de la recherche des points multiples à distance finie.* Les deux racines de l'équation (3) satisferont au système (1), pourvu qu'aucune d'elles ne soit racine de $S(t)$ [1]. En définitive, la représentation étant propre, le système (1bis) a donc trois espèces de solutions :

1° celles qui résultent de l'hypothèse $t_1 = t_2$;

2° celles qui proviennent véritablement des points multiples à distance finie ;

3° celles qui proviennent de l'association de deux racines de $S(t)$.

Exercice. — A titre d'application, l'élève cherchera les points doubles de la courbe

$$x = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^4}, \qquad y = \frac{(1 - t^2)(2 + t)(\lambda + t)}{1 + t^4}.$$

Il sera conduit au système

$$(1 + p)(1 + p^2 - s^2) = 0,$$
$$s\left[(1 - 2\lambda)(1 - p^2) - (s^2 - 2p)(1 + 2\lambda)\right] = 0.$$

En prenant $p = -1$, la deuxième équation se réduit à

$$s(s^2 + 2)(1 + 2\lambda) = 0.$$

Lorsque λ vaut $-\frac{1}{2}$, elle est identiquement vérifiée. La représen-

---

[1] Il n'est pas permis de supposer $S(t_1) = 0$ et $S(t_2) \neq 0$, car cela entraînerait $P(t_1) = Q(t_1) = 0$, et cela serait en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle $S(t)$ est le dénominateur commun de moindre degré.

tation est donc impropre. On la réduit en posant

$$\frac{1-t^2}{t}=0.$$

Lorsque λ diffère de $-\frac{1}{2}$, la solution $s=0$, $p=-1$, donne le couple $t_1=-1$, $t_2=+1$ qui fournit l'origine, qui est donc un point double. En écartant alors les hypothèses qui correspondent à l'accouplement de deux racines du dénominateur $1+t^4$, on obtient en fin de compte deux autres points doubles, qui correspondent à

$$p=2\lambda, \qquad s=\pm\sqrt{4\lambda^2+1}.$$

Ces points, lorsque λ tend vers zéro, se rapprochent indéfiniment de l'origine, qui, quand λ s'annule, devient un point triple

$$(t_1=-1,\ t_2=+1,\ t_3=0).$$

94. Remarques. — I. — La courbe étudiée étant réelle, la résolution du système (2) peut conduire à des systèmes de valeurs s, p imaginaires : il leur correspond des points doubles imaginaires de la courbe. On peut trouver aussi des solutions s, p réelles, telles que s^2-4p soit négatif. Les valeurs t_1 et t_2 correspondantes sont imaginaires conjuguées, et donnent naissance à deux points imaginaires conjugués qui se confondent, donc, à un point singulier réel, avec deux tangentes imaginaires conjuguées. Ainsi la courbe

$$x=1+t+t^3, \qquad y=t(1+t+t^2)$$

présente à l'origine un point isolé, qui correspond aux deux racines cubiques imaginaires de l'unité. Enfin les valeurs s, p telles que l'on ait

$$s^2-4p=0$$

fournissent des nombres t_1 et t_2 égaux, mais que nous pouvons interpréter comme correspondant à des points singuliers. En effet, en vertu des identités

$$F(s,p)=S(t_1)S(t_2)\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2},$$
$$G(s,p)=S(t_1)S(t_2)\frac{g(t_1)-g(t_2)}{t_1-t_2},$$

la racine double du trinome t^2-ts+p qui correspond au système s, p mis en jeu, satisfait aux équations

$$f'(t)=0, \qquad g'(t)=0.$$

Donc elle est racine d'ordre dépassant un de l'équation

$$uf(t)+vg(t)+w=0,$$

u, v, w étant les coefficients d'une droite menée au hasard par le point considéré. Donc l'ordre de ce point dépasse un sur la courbe : c'est bien par suite un point singulier [1].

II. — Au point de vue théorique, il est important de pouvoir déterminer tous les points singuliers d'une courbe unicursale, sans établir de distinction entre les points à distance finie et les points à l'infini. Pour les points à distance finie, la question est maintenant entièrement résolue à l'aide du système (2) : il ne laisse échapper aucun point singulier à distance finie, et inversement toute solution de ce système qui n'a pas été obtenue par l'association de deux racines de $S(t)$ conduit bien à un point singulier. Nous ne sommes donc plus bien éloignés de la généralité complète, et il suffit de modifier légèrement le raisonnement initial pour obtenir indifféremment les points singuliers à distance finie et les points à l'infini.

Remarquons à cet effet qu'on peut prendre comme coordonnées homogènes d'un point de la courbe les valeurs de $P(t)$, $Q(t)$, $S(t)$, qui, par hypothèse, ne sont jamais simultanément nulles. On sera alors conduit à chercher les systèmes de nombres t_1 et t_2 qui satisfont simultanément aux trois équations, d'ailleurs compatibles [2],

$$\frac{Q(t_1)S(t_2) - S(t_1)Q(t_2)}{t_1 - t_2} = 0, \qquad \frac{S(t_1)P(t_2) - S(t_2)P(t_1)}{t_1 - t_2} = 0,$$
$$\frac{P(t_1)Q(t_2) - Q(t_1)P(t_2)}{t_1 - t_2} = 0.$$

La recherche de tous les points singuliers se ramène en définitive à celle des points communs à la fois à trois courbes algébriques

$$G(s, p) = 0, \qquad F(s, p) = 0, \qquad H(s, p) = 0.$$

95. Théorème. — *Toute courbe plane d'ordre m qui admet un point d'ordre m — 1 est unicursale.*

Si ce point est à distance finie, prenons-le pour origine. La courbe a pour équation

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) = 0.$$

---

[1] Ce raisonnement n'est valable, cela va sans dire, que si la représentation est propre.

[2] En somme, il y a des points singuliers à l'infini s'il y a des couples t_1, t_2 de racines de $S(t)$, tels que l'on ait

$$\frac{P(t_1)Q(t_2) - P(t_2)Q(t_1)}{t_1 - t_2} = 0.$$

Une sécante

$$y = tx,$$

passant par l'origine, rencontre dès lors la courbe en un seul point, dont les coordonnées dépendent de t. On a ainsi immédiatement la représentation rationnelle cherchée

$$x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \qquad y = \frac{-t\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}.$$

Il est d'ailleurs immédiat que cette représentation est propre.

Si le point d'ordre $m-1$ est à l'infini, prenons l'axe Oy parallèle à la direction qui correspond à ce point. Il est alors immédiat que y est une fonction rationnelle de x. Le théorème est donc démontré.

En particulier, *les courbes du second ordre, et les courbes du troisième ordre qui admettent un point d'ordre deux, sont donc unicursales.*

Nous établirons plus tard qu'inversement, toute cubique plane unicursale admet un point d'ordre deux. C'est dire qu'une cubique définie par une équation dont les coefficients sont choisis au hasard n'est pas unicursale.

D'une manière générale, le fait qu'une courbe algébrique est unicursale est intimement lié au nombre de ses points singuliers. Nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

Si une courbe algébrique d'ordre n n'admet pour singularités que des points d'ordre deux à tangentes distinctes, pour qu'elle soit unicursale, il faut et il suffit que le nombre de ses points singuliers à distance finie ou à l'infini soit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

C'est d'ailleurs cet entier, on le démontre, qui constitue, pour une courbe indécomposée d'ordre n, le nombre maximum des points singuliers. Autrement dit :

Une courbe d'ordre n qui a des points singuliers en nombre dépassant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *se décompose.*

Par exemple, une cubique qui admet deux points d'ordre deux se décompose, et, dans ce cas particulier, la démonstration est

immédiate, puisque la droite qui joint ces deux points, ayant en commun quatre points avec la courbe, en fait entièrement partie.

96. Courbes unicursales de l'espace. — Il est facile de généraliser les points essentiels de la théorie précédente aux courbes gauches. Soit la courbe

$$x = \frac{P(t)}{S(t)}, \qquad y = \frac{Q(t)}{S(t)}, \qquad z = \frac{R(t)}{S(t)},$$

où $S(t)$ est le dénominateur commun de moindre degré. Si la représentation est propre, on établit, en cherchant le nombre des points de rencontre de la courbe avec un plan, que son ordre est égal au plus grand des degrés des quatre polynomes P, Q, R, S.

Soit une courbe gauche algébrique d'ordre m, qui possède un point multiple d'ordre $m-2$. Joignons ce point à un autre point fixe sur la courbe. Soient

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

les équations de la droite ainsi obtenue. Un plan

$$P + tQ = 0,$$

passant par cette droite, coupe la courbe en un seul point dépendant de t; par suite, les coordonnées de ce point sont des fonctions rationnelles de t, et par suite la courbe est unicursale. En particulier, *toute cubique gauche est unicursale.*

Est également unicursale une courbe gauche d'ordre m rencontrée par une certaine droite en $m-1$ points, car un plan passant par cette droite coupe la courbe en un seul point dépendant de t.

CHAPITRE VI

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

I. — Dans le plan.

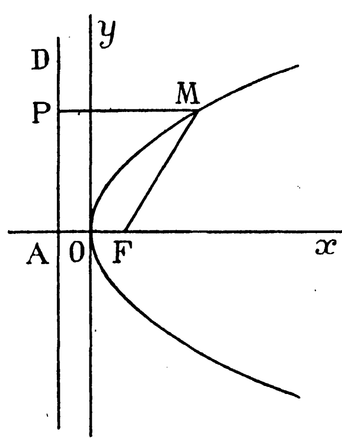
97. La détermination, dans le plan xOy, d'une certaine figure, exige la connaissance des valeurs que prennent un certain nombre de paramètres : pour un triangle, par exemple, on doit donner l'abscisse et l'ordonnée de chaque sommet, soient six paramètres. Considérons une figure dont la détermination nécessite la donnée des valeurs de n paramètres. Supposons que, parmi ceux-ci, $n-p$ seulement soient fixés. Portons notre attention sur toutes les figures, de l'espèce considérée, qu'on obtient en fixant arbitrairement les p derniers paramètres. Nous dirons qu'elles forment une famille à p paramètres. Ainsi les triangles dont un seul côté est fixé en grandeur et position forment une famille à deux paramètres.

Considérons, en particulier, une famille de figures à un seul paramètre λ. Supposons que l'on sache, quel que soit λ, particulariser, dans la figure F_λ fournie par la valeur λ, un certain point M_λ, les moyens employés pour obtenir ce résultat pouvant d'ailleurs être extrêmement variés : par exemple, si F_λ est un triangle dont deux sommets sont fixes et dont le troisième décrit une ligne connue, on pourra considérer le point M_λ qui est le centre du cercle circonscrit, ou encore du cercle inscrit, etc... D'une manière générale, les coordonnées de M_λ seront des fonc-

tions du paramètre λ, et, par suite, ce point décrira une ligne, qu'on appelle son *lieu géométrique*.

98. Dans certains cas, le moyen employé pour particulariser M_λ, dans la figure F_λ, conduit immédiatement à la relation qui lie ses coordonnées, cartésiennes ou polaires, quand λ varie, c'est-à-dire à une équation représentant le lieu qu'il décrit.

Exemples. 1° Soit une droite fixe D et un point fixe F. D'un point M, abaissons la perpendiculaire MP sur D. Si l'on impose la condition $MP = MF$, le triangle MPF dépend d'un paramètre. Cherchons le lieu du point M : il passe par le milieu O de la perpendiculaire FA abaissée de F sur D. Prenons pour origine le point O, pour axe Ox la demi-droite OF, l'axe Oy étant parallèle à D et soit



$$\overline{AF} = p.$$

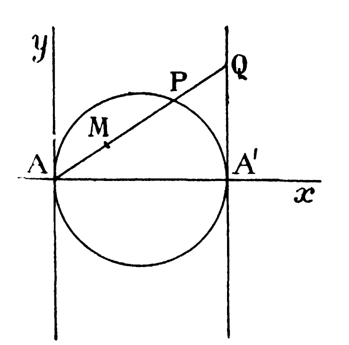
En exprimant la condition

$$MF = MP,$$

on obtient immédiatement l'équation du lieu ; nous laisserons à l'élève le soin de faire ce calcul très simple. L'équation cherchée est

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Cette courbe s'appelle une *parabole*. Dans cet exemple, l'équation (1) traduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point appartienne au lieu.



2° Sur un cercle fixe on prend un point fixe A, et on mène la tangente T au point A′ diamétralement opposé. Cherchons le lieu du point M déterminé sur une sécante APQ issue de A par la condition

$$\overline{AM} = \overline{PQ}.$$

Ici, nous aurons immédiatement l'équation polaire du lieu en prenant pour pôle le point A, pour axe

polaire AA'. En posant

$$\overline{AA'} = a, \qquad (\widehat{\overline{AA'}, \overline{AP}}) = \omega, \qquad \overline{AM} = \rho,$$

on trouve aisément

$$\rho = \frac{a \sin^2 \omega}{\cos \omega}.$$

On passe de là facilement à l'équation cartésienne de la courbe, rapportée aux axes Ax et Ay, en utilisant les formules

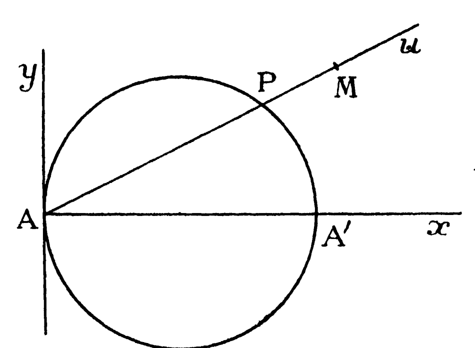
$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega ;$$

cette équation est

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

La courbe qu'elle représente porte le nom de *cissoïde de Dioclès* (¹).

3° Le point A étant fixe sur un cercle de diamètre a, on porte, sur les cordes AP issues de ce point, une longueur



$$\mathrm{PM} = b.$$

Le lieu du point M s'appelle un limaçon de Pascal, et on voit immédiatement que son équation polaire est

$$(2) \qquad \rho = a \cos \omega + b.$$

Remarque. — Dans cet exemple, il importe de bien préciser les conditions de l'énoncé. Envisageons les deux problèmes suivants :

1° Trouver le lieu des points M tels que PM ait la longueur b, le segment PM étant extérieur au cercle.

2° Trouver le lieu des points M obtenus en portant sur chaque rayon vecteur orienté Au, à partir de P, un segment PM, tel que

$$\overline{\mathrm{PM}} = b.$$

Chacun d'eux nous conduira à des résultats bien distincts. Alors que le second donne toute la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation (2), le premier fournit seulement la portion de cette courbe qui correspond aux inégalités

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

(¹) Dans ces deux exemples, il est immédiat que l'équation obtenue exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point appartienne au lieu.

L'élève montrera que le deuxième problème amène à porter la longueur PM de part et d'autre de P sur chaque droite AP. Il expliquera, en même temps, qu'à la place de l'équation (2) on peut tout aussi bien prendre, comme équation polaire du lieu,

$$\rho = a \cos \omega - b.$$

99. Un cas très usuel est celui où le point M_λ de la figure F_λ est défini par l'intersection de deux courbes de cette figure, dont on sait écrire les équations pour chaque valeur de λ, soient

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad g(x, y, \lambda) = 0.$$

Si ces équations sont résolubles par rapport à x et y, elles fourniront immédiatement une représentation paramétrique du lieu. Sinon, *on obtiendra l'équation du lieu en éliminant* λ *entre les deux équations précédentes*. Car, pour qu'un point (x, y) appartienne au lieu, il faut et il suffit que les deux équations précédentes aient une racine commune en λ.

Remarques. — I. Il faut cependant observer que, suivant la manière dont l'énoncé du problème est libellé, le lieu comprendra tous les points de la courbe

$$R(x, y) = 0,$$

obtenue par l'élimination, ou, seulement, certains arcs de cette courbe tels que certaines inégalités soient vérifiées en tous leurs points.

Ainsi, dans le dernier exemple du numéro précédent (limaçon de Pascal), le point M peut être regardé comme l'intersection de la droite AP,

$$y = \lambda x,$$

et du cercle de centre P et de rayon PM

$$\left(x - \frac{a\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 = b^2.$$

La courbe entière, que l'on obtient en éliminant λ, fournira le lieu qui correspond à notre seconde forme d'énoncé. Mais, si l'énoncé est donné sous la première forme, le lieu comprend seulement l'arc

de cette courbe qui satisfait aux inégalités

$$x > 0, \qquad x^2 + y^2 - ax > 0.$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le segment PM soit tout entier à l'extérieur du cercle.

II. — Pour un système de nombres x, y, satisfaisant à

$$R(x, y) = 0,$$

les deux équations

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad g(x, y, \lambda) = 0$$

ont en général une seule racine commune λ. Si nous n'envisageons que des éléments réels, cette racine sera elle-même réelle. Mais, si pour un point réel (x_0, y_0) de la courbe obtenue par l'élimination, les équations des courbes variables ont deux racines communes λ'_0 et λ''_0, ces deux racines pourront être réelles ou imaginaires conjuguées. Cette circonstance, si elle se produit au point (x_0, y_0) à titre exceptionnel, indique que ce point est un point double de la courbe ou un point isolé. Si elle se produit en tous les points de la courbe

$$R(x, y) = 0,$$

elle indique en général qu'on aurait pu faire un choix plus heureux du paramètre qui détermine la figure mobile. On comprend aisément que cette question englobe celle de la représentation propre et impropre des courbes unicursales et la recherche de leurs points multiples : on est en effet ramené à ces problèmes, que nous avons déjà étudiés, lorsque f et g sont des fonctions linéaires en x et y et entières en λ.

III. — Pour certaines valeurs de λ, les courbes

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad g(x, y, \lambda) = 0,$$

que nous supposons algébriques, peuvent se décomposer et comprendre une courbe algébrique commune, qui pourra appartenir ou non au lieu, suivant le mode de rédaction de l'énoncé.

IV. — Si l'une des courbes

$$f = 0 \qquad \text{ou} \qquad g = 0,$$

la première par exemple, passe par un point fixe (x_0, y_0), la courbe

$$R = 0$$

y passe aussi, car l'équation

$$f(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

se réduisant à une identité, toute valeur de λ pour laquelle la courbe

$$g = 0$$

passe par le point (x_0, y_0) fournira un point du lieu.

100. *Figures dépendant de n paramètres liés par n — 1 relations.* — Dans le plan, les points d'une figure à plus d'un paramètre ne possèdent pas, en général, de lieu géométrique, si toutefois ces paramètres sont indépendants ; il y a cependant des exceptions possibles, au même titre que des points particuliers d'une figure à un paramètre peuvent demeurer fixes. Soient données deux droites portant deux côtés parallèles d'un rectangle, les deux autres restant indéterminés : nous avons une figure à deux paramètres. Ceci n'empêche pas le centre du rectangle d'avoir un lieu géométrique, qui est la droite équidistante des deux côtés fixes.

Écartons ces cas singuliers, pour fixer notre attention sur un cas très important pour les applications : il est parfois commode, pour l'étude d'une figure à un paramètre, d'introduire n paramètres qui, cette fois, au lieu d'être indépendants, seront liés par $n - 1$ relations

$$\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0, \ldots, \qquad \varphi_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0.$$

Soient alors

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0, \qquad g(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$$

les courbes qui, par leur intersection, déterminent M_λ. Pour avoir l'équation du lieu de ce point, il suffit d'exprimer que les $n - 1$ équations précédentes admettent un système de solutions communes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On éliminera donc ces n paramètres entre les $n - 1$ relations précédentes. Il restera à s'assurer si tous les points de la courbe fournie par cette élimination font bien partie du lieu, ce qui dépendra essentiellement de la manière dont on aura proposé l'énoncé.

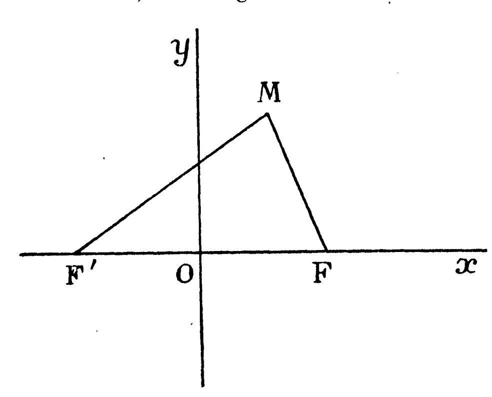
Exemple. — Examinons le cas où le lieu serait défini par une relation entre les distances

$$MF = r \qquad \text{et} \qquad MF' = r',$$

d'un de ses points M à deux points fixes F et F'. En prenant pour axe $x'x$ la droite FF', pour axe $y'y$ la perpendiculaire au milieu de FF', nous serons en présence des relations

$$\varphi(r, r') = 0, \qquad (\overline{OF} = c)$$
$$(x-c)^2 + y^2 = r^2,$$
$$(x+c)^2 + y^2 = r'^2.$$

En somme, le triangle MFF' est ici déterminé (à une symétrie près) par la donnée des deux paramètres r et r', liés par la relation $\varphi = 0$. Son sommet M est l'intersection de deux cercles, de centres F et F', et de rayons respectifs r et r'. D'après la théorie qui précède, nous aurons donc l'équation du lieu en éliminant r et r' entre les trois équations ci-dessus.



L'élève fera cette élimination dans les cas suivants:

1° On suppose

$$\varphi = r + r' - 2a = 0\,;$$

on obtient *l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (b^2 = a^2 - c^2).$$

2° On prend

$$\varphi = r - r' \pm 2a = 0\,;$$

on obtient *l'hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (b^2 = c^2 - a^2).$$

(On expliquera comment il se fait que le résultat de l'élimination soit le même dans les deux exemples.)

3° On prend

$$\varphi = rr' - a^2 = 0\,;$$

on obtient des courbes dont on étudiera la forme suivant les valeurs du rapport $\frac{a}{c}$. Ces courbes sont appelées *ovales de Cassini*. Dans le cas de $\frac{a}{c} = 1$, la courbe présente un point double à l'origine; on lui donne le nom de *lemniscate*.

II. — Dans l'espace.

Cette question se subdivise en deux parties : lieu d'une ligne, et lieu d'un point.

101. Lieu d'une ligne. — Considérons une ligne dépendant d'un paramètre λ. Elle peut être définie par les expressions des coordonnées d'un de ses points en fonction d'une variable t, ces expressions dépendant de λ ; soient

$$x = f(t, \lambda), \qquad y = g(t, \lambda), \qquad z = h(t, \lambda).$$

La ligne engendre en général une surface, dont la représentation paramétrique est fournie par les trois égalités précédentes. On aperçoit immédiatement un cas d'exception, c'est celui où l'on aurait

$$x = \mathrm{F}(u), \qquad y = \mathrm{G}(u), \qquad z = \mathrm{H}(u),$$

u étant une fonction déterminée de t et de λ. Les trois équations précédentes représenteraient alors une ligne ne variant pas avec le paramètre λ, celui-ci influant seulement sur le mode de représentation paramétrique. Ainsi, si nous imprimons à un corps solide un mouvement hélicoïdal autour d'un axe Δ, chaque ligne de ce corps engendre une surface, pourvu que cette ligne ne soit pas une hélice d'axe Δ, de pas égal à celui du mouvement.

Si la ligne est définie par l'intersection de deux surfaces (1)

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \psi(x, y, z, \lambda) = 0,$$

nous obtiendrons le lieu de cette ligne par l'élimination du paramètre λ. Nous laissons à l'élève le soin d'établir cette proposition. Plus généralement, si l'on met en jeu n paramètres liés par $n-1$ relations, on est conduit à éliminer ces paramètres entre $n+1$ équations, à savoir les deux équations de la ligne et les $n-1$ relations.

(1) Nous supposons, par la suite, que la ligne considérée est l'intersection complète des deux surfaces $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

102. Traitons quelques applications.

1° **Cylindres.** — *Un cylindre est le lieu d'une droite de direction fixe, assujettie, par une condition d'égalité, à ne plus dépendre que d'un seul paramètre.*

Supposons que la direction fixe soit définie comme intersection des plans non parallèles

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Une parallèle quelconque sera

$$P = \lambda, \qquad Q = \mu ;$$

cette droite ne dépend plus que d'un seul paramètre, si l'on assujettit λ et μ à vérifier une seule équation de condition

$$f(\lambda, \mu) = 0.$$

D'après la théorie générale, l'équation du lieu s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations

$$P = \lambda, \qquad Q = \mu, \qquad f(\lambda, \mu) = 0 ;$$

cette élimination nous donne immédiatement

(1) $$f(P, Q) = 0.$$

Inversement, toute équation de la forme (1) peut être regardée comme le lieu d'une droite

$$P = \lambda, \qquad Q = \mu$$

de direction fixe, assujettie à la relation

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

et, par suite, représente un cylindre.

Montrer, comme exercice, que l'équation du cylindre parallèle à la direction (α, β, γ) et passant par l'intersection des deux surfaces

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

s'obtient en éliminant ρ entre les deux équations

$$\varphi(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho) = 0, \qquad \psi(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho) = 0.$$

2° **Cônes.** — Généralisant la définition du n° 46, nous dirons qu'*un cône est le lieu d'une droite issue d'un point fixe, assu-*

jettie, par une condition d'égalité, à ne dépendre que d'un seul paramètre (¹).

Supposons que le point fixe soit défini comme intersection des trois plans

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

Une droite passant par ce point sera

$$P = \lambda R, \qquad Q = \mu R.$$

Elle ne dépend plus que d'un seul paramètre si l'on assujettit λ et μ à vérifier une équation de condition

(2) $$f(\lambda, \mu) = 0.$$

Le lieu de cette droite sera donc la surface représentée par l'équation

(3) $$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

(4) $$F(P, Q, R) = 0,$$

F représentant une fonction homogène en P, Q, R. Inversement, soit une équation de la forme (4), où F est homogène. On peut la ramener à la forme (3). Si donc les trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ ont un seul point d'intersection à distance finie, on peut regarder la surface étudiée comme le lieu de la droite

$$P = \lambda R, \qquad Q = \mu R$$

passant par ce point, cette droite étant assujettie à la condition (2). La surface en question est bien un cône.

Si les trois plans P, Q, R ont zéro ou un nombre infini de points communs alignés, on peut écrire une identité de la forme

$$R \equiv aP + bQ + c,$$

a, b, c étant des constantes. La surface (4) se réduit donc à un

(¹) On comprend l'intérêt que comporte cette généralisation. Dans un problème, un cône n'est pas toujours défini comme le lieu d'une droite issue d'un point fixe et rencontrant une courbe fixe : il peut être le lieu d'une droite issue d'un point fixe, tangente à une surface fixe.

cylindre (ou à un système de plans parallèles, si P et Q ne sont pas sécants).

Nous avons déjà dit (n° 88) comment se forme l'équation du cône ayant pour sommet un point donné et s'appuyant sur l'intersection de deux surfaces algébriques.

3° **Surfaces de révolution.** — On donne ce nom à toute surface engendrée par la rotation d'une courbe autour d'un axe fixe Δ ; une telle surface est donc aussi le lieu d'un cercle admettant pour axe la droite Δ et soumis, en outre, à une certaine condition. Soient $S = 0$ l'équation d'une sphère (S) ayant son centre sur Δ et $P = 0$ celle d'un plan (P) perpendiculaire à Δ. Tout cercle d'axe Δ peut être considéré comme l'intersection d'une sphère concentrique à (S) et d'un plan parallèle au plan (P). Un tel cercle peut donc se représenter par des équations de la forme

$$S = \lambda, \qquad P = \mu.$$

La condition supplémentaire à laquelle on assujettit ce cercle se traduit par une relation

$$f(\lambda, \mu) = 0.$$

Pratiquement, si l'on donne la courbe dont la rotation autour de Δ engendre la surface, cette dernière relation s'obtient en exprimant que le cercle variable d'axe Δ rencontre la courbe génératrice.

Cela posé, on obtient l'équation du lieu en éliminant λ et μ entre les équations du cercle et la relation $f(\lambda, \mu) = 0$, ce qui donne

$$f(S, P) = 0.$$

Inversement, *toute équation de cette forme* peut être regardée comme résultant d'une élimination analogue et, par suite, représente une surface de révolution ayant pour axe la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère (S) sur le plan (P).

Examinons le cas où l'axe est Oz, et où l'on donne la *méridienne* de la surface (section par un plan contenant l'axe) dans le plan xOz ; soit

$$f(x, z) = 0$$

l'équation de cette courbe. La surface est le lieu du cercle

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad z = \lambda,$$

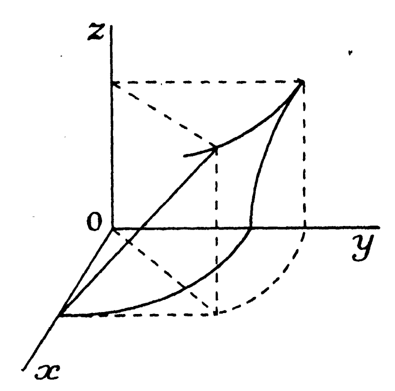
assujetti à rencontrer la méridienne ; cette condition impose à λ et ρ de vérifier la relation

$$f(\rho, \lambda) = 0.$$

On obtient l'équation du lieu en éliminant λ et ρ, ce qui donne

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Montrer, comme exercice, que la surface de révolution engendrée par la rotation d'une droite autour de Oz a pour méridienne une hyperbole, dont Oz est l'axe non transverse (on prendra la droite parallèle au plan yOz, par exemple). Etudier géométriquement cette surface, connue sous le nom d'*hyperboloïde de révolution à une nappe,* appelée aussi *surface gauche de révolution.* Montrer que par chaque point de la surface, il passe deux droites qui y sont entièrement contenues : ces droites déterminent le plan tangent en ce point. Toutes les droites situées sur la surface se répartissent en deux systèmes : deux droites de la surface sont ou non dans un même plan, suivant qu'elles appartiennent à des systèmes différents ou au même système. Les asymptotes d'une hyperbole méridienne, en tournant autour de Oz, engendrent un cône de révolution, qui est aussi le lieu des parallèles menées par l'origine aux droites situées sur la surface gauche : on lui donne le nom de *cône asymptote.* Un plan tangent à ce cône coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices parallèles, et par suite lui est aussi tangent au point à l'infini commun à ces deux droites. Il y a donc communauté des plans tangents entre l'hyperboloïde et son cône asymptote en tout point à l'infini.



CÔNES ET CYLINDRES DE RÉVOLUTION. — Il est facile d'obtenir directement l'équation d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

Soit un cône de révolution ayant pour sommet le point $S(x_0, y_0, z_0)$, pour angle au sommet θ, la direction de l'axe étant

définie par les trois paramètres a, b, c. Pour qu'un point M soit sur le cône, il faut et il suffit que l'un des angles de SM avec l'axe soit égal à θ. On en déduit aisément l'équation cherchée

$$[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]^2$$
$$= \cos^2\theta(a^2+b^2+c^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].$$

On obtient de même l'équation d'un cylindre de révolution en exprimant que la distance d'un point à l'axe est égale au rayon. Appelons a, b, c, l, m, n un système de coordonnées de Plücker de l'axe et R le rayon. L'équation cherchée est (n° 32)

$$(cy-bz-l)^2+(az-cx-m)^2+(bx-ay-n)^2$$
$$= R^2(a^2+b^2+c^2).$$

103. Lieu d'un point. — Si le point considéré appartient à une figure dépendant de deux paramètres, son lieu géométrique est en général une surface ; s'il appartient à une figure à un paramètre, son lieu sera une ligne.

Premier cas (*deux paramètres*). — Soient λ et μ les paramètres dont dépend la figure F. Un point M de cette figure pourra être défini comme l'intersection de trois surfaces liées à celle-ci, soient

$$f(x, y, z, \lambda, \mu)=0, \quad g(x, y, z, \lambda, \mu)=0, \quad h(x, y, z, \lambda, \mu)=0.$$

On obtient alors l'équation du lieu en éliminant λ et μ entre ces trois équations (faire le raisonnement) ([1]).

Deuxième cas (*un paramètre*). — Soit λ le paramètre unique dont dépend la figure F ; particularisons dans celle-ci un point M, qui sera l'intersection des trois surfaces

$$f(x, y, z, \lambda)=0, \quad g(x, y, z, \lambda)=0, \quad h(x, y, z, \lambda)=0.$$

Le lieu de M est alors une courbe ; si l'on sait résoudre les trois équations précédentes en x, y, z, on en a immédiatement une

---

([1]) Dans ce cas, il peut arriver, exceptionnellement, que le lieu soit une ligne : c'est ce qui se produirait si l'on avait

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) \equiv f_1(x, y, z, \varphi), \quad g \equiv g_1(x, y, z, \varphi), \quad h \equiv h_1(x, y, z, \varphi),$$

φ désignant une fonction déterminée de λ et μ. A la vérité, les trois surfaces et leur point d'intersection ne dépendraient en réalité que du seul paramètre φ.

représentation paramétrique en fonction de λ ; sinon on peut rechercher le lieu comme intersection de deux surfaces. Soient

$$P(x, y, z) = 0, \qquad Q(x, y, z) = 0$$

les équations obtenues en éliminant λ entre

$$f = 0, \qquad g = 0$$

d'une part, et entre

$$g = 0, \qquad h = 0$$

d'autre part. Tout point du lieu appartient à l'intersection des surfaces

$$P = 0, \qquad Q = 0 ;$$

si cette intersection (cas d'équations algébriques) est indécomposée, et si l'énoncé n'impose aux points du lieu aucune restriction d'inégalité, la réciproque est vraie : tout point de cette intersection fait partie du lieu. Mais ce résultat n'est pas, en général, exact lorsque l'intersection se décompose. Ainsi, en cherchant le lieu du point commun aux trois plans

$$x = \lambda^2 + \lambda, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = 2\lambda^2 - \lambda,$$

il ne se présente aucune difficulté si l'on remarque que ces équations donnent immédiatement une représentation paramétrique : le lieu est une courbe du second ordre (parabole). Opérons maintenant par élimination. Associons les deux premières équations, puis les deux dernières. Nous obtenons les surfaces

$$P = (x - y)^2 - y = 0, \qquad Q = (z - 2y)^2 - y = 0,$$

dont l'intersection se décompose en deux courbes planes, en vertu de l'identité

$$P - Q = (x - 3y + z)(x + y - z).$$

En se reportant aux équations initiales, on voit que seule répond à la question celle de ces deux courbes qui est située dans le plan

$$x - 3y + z = 0.$$

On peut éviter ces difficultés en utilisant la remarque suivante : le lieu sera surabondamment défini si l'on connaît ses points d'inter-

section avec une famille de plans parallèles, par exemple les plans $x = \text{const}$. Il sera donc surabondamment déterminé, à fortiori, si l'on sait écrire l'équation de n'importe quel cylindre passant par la courbe qui le constitue. Or, en appelant α, β, γ les paramètres directeurs d'une génératrice d'un tel cylindre, l'élève établira sans peine que son équation peut s'obtenir en éliminant λ et ρ entre les équations

$$f(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho, \lambda) = 0,$$
$$g(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho, \lambda) = 0,$$
$$h(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho, \lambda) = 0.$$

En particulier, pour avoir la projection du lieu sur un plan de coordonnées, xOy par exemple, on élimine λ et la troisième coordonnée z entre les équations initiales.

CHAPITRE VII

ÉTUDE SOMMAIRE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS NOTIONS SUR L'HOMOGRAPHIE

---

104. Beaucoup de recherches de lieux géométriques tirent leur origine d'une transformation que l'on fait subir, point par point, à la figure étudiée. Pour préciser, supposons qu'au point $M(x, y, z)$ de l'espace, nous fassions correspondre le point M_1 défini par les relations

$$x_1 = f(x, y, z), \qquad y_1 = g(x, y, z), \qquad z_1 = h(x, y, z).$$

On sera souvent amené à chercher le lieu du point M_1, sachant que le point M décrit un lieu connu. Il n'y a là aucune difficulté nouvelle et un jeu d'éliminations fournit le résultat.

Inversement, la recherche d'un lieu peut fréquemment se ramener à celle d'un autre lieu, plus facile à obtenir, à l'aide d'une transformation appropriée. L'étude des transformations usuelles offre donc, pour cette raison, un grand intérêt. Mais son importance ne se limite pas là. L'exposé sommaire que nous allons donner suffira à montrer au lecteur le nombre des questions de géométrie auxquelles la notion de transformation peut être utilement appliquée.

Nous rappellerons rapidement la théorie des déplacements, symétries et similitudes en y reliant le point de vue géométrique, déjà connu de l'élève, au point de vue analytique. Généralisant à l'aide de ce dernier, nous serons amenés à étudier la transfor-

mation linéaire, qui comprend comme cas particulier les précédentes, puis la transformation homographique, qui englobe à son tour cette dernière.

I. — Déplacements et symétries.

105. Soit un trièdre trirectangle (T) ou $Oxyz$, que nous prenons pour trièdre de coordonnées. Prenons-en un autre (T_1) ou $O_1x_1y_1z_1$, de même orientation. Soient A, B, C les coordonnées de O_1 par rapport à (T); donnons-nous le tableau des neuf cosinus (liés par six relations, voyez n° 12[bis])

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	a	b	c
Oy_1	a'	b'	c'
Oz_1	a''	b''	c''

Entre les anciennes et les nouvelles coordonnées d'un point, nous avons établi les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{A} + ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y = \mathrm{B} + bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z = \mathrm{C} + cx_1 + c'y_1 + c''z_1. \end{cases}$$

Nous allons donner de ces formules une autre interprétation. Désignant toujours par M le point qui, rapporté au trièdre (T), a pour coordonnées x, y, z, appelons M_1 celui qui a pour coordonnées x_1, y_1, z_1 *par rapport au même trièdre*. Les formules (1) permettent de déduire du point M_1 le point M ; inversement, on déduira M_1 de M à l'aide des suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = a(x - \mathrm{A}) + b(y - \mathrm{B}) + c(z - \mathrm{C}), \\ y_1 = a'(x - \mathrm{A}) + b'(y - \mathrm{B}) + c'(z - \mathrm{C}), \\ z_1 = a''(x - \mathrm{A}) + b''(y - \mathrm{B}) + c''(z - \mathrm{C}), \end{cases}$$

obtenues en résolvant les formules (1) en x_1, y_1, z_1. Le système (1)

[ou le système (2)] définit une transformation. Appliquée à une figure F, elle permet d'en déduire une figure F_1 ; ces deux figures sont *superposables,* car chaque point M_1 de F_1 a, par rapport au trièdre (T), les mêmes coordonnées que son correspondant M de F, par rapport au trièdre (T_1). Cette transformation, qui permet de passer de F à F_1, n'est donc autre qu'un *déplacement.*

Dans le cas où les formules (1) se réduisent aux suivantes :

$$x = A + x_1, \qquad y = B + y_1, \qquad z = C + z_1,$$

le vecteur $\mathbf{MM_1}$ reste équipollent à un vecteur fixe, de composantes A, B, C : ce déplacement particulier est une *translation.*

Lorsque, dans un déplacement, il existe un point O qui coïncide avec son transformé, la même propriété appartient à une infinité d'autres points, répartis sur une droite : la transformation se réduit à une *rotation* autour de cette droite. En effet, on peut alors attribuer ce point O comme origine commune aux deux trièdres de coordonnées (T) et (T_1) : ceux-ci ayant la même orientation, nous avons vu (n° 12) qu'on peut, par une rotation, amener le premier sur le second. Cette rotation se confond donc avec le déplacement considéré.

Cette proposition entraîne la suivante :

Tout déplacement résulte d'une translation suivie d'une rotation. (On peut, en opérant convenablement, rendre la translation parallèle à l'axe de la rotation.)

Remarques. — 1. Dans toute rotation, le cône isotrope ayant pour sommet un point quelconque de l'axe de rotation est globalement conservé[1]. En effet, prenons ce point pour origine. Quel que soit le trièdre trirectangle de sommet O auquel nous rapportions les coordonnées, l'équation du cône isotrope sera toujours

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Il en résulte aisément que tout déplacement conserve globalement le cercle de l'infini (en effet une translation conserve individuellement chaque point de ce cercle, et une rotation le conserve globalement).

---

(1) Nous employons cette locution pour indiquer qu'une génératrice quelconque est en général modifiée, se transformant en une autre génératrice du même cône. Mais le cône, pris dans son ensemble, n'est pas altéré par la transformation.

II. — Dans le plan, nous laissons à l'élève le soin de faire la théorie des déplacements. Les formules (1) doivent alors être remplacées par les suivantes :

$$x = A + x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta,$$
$$y = B + x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta.$$

On démontrera les points suivants :

Tout déplacement se ramène à une rotation autour d'un point, ou, exceptionnellement, à une translation.

Toute rotation conserve les droites isotropes issues de son centre ; par suite, tout déplacement conserve les points cycliques du plan.

106. Symétries. — Une symétrie par rapport à une droite n'est autre chose qu'une rotation de deux droits autour d'elle. Seules les symétries par rapport à un point ou à un plan sont des transformations nouvelles ; elles ne sont d'ailleurs pas distinctes, comme le montre la proposition fondamentale suivante, que nous nous bornons à rappeler :

Les figures F′ et F″, déduites d'une même figure F, la première par symétrie par rapport à un point, la seconde par symétrie par rapport à un plan, peuvent être déduites l'une de l'autre par déplacement.

Il en est d'ailleurs de même des deux figures qu'on peut déduire d'une même troisième par symétrie par rapport à des centres différents, ou à des plans différents.

Ceci permet de poser la définition suivante :

On nomme figure symétrique d'une figure donnée toute figure déduite de la première par symétrie par rapport à un point ou un plan quelconque (1).

Reprenons les formules (1) et supposons que les neuf cosinus a, b, c, ..., c'' soient tels que le trièdre (T_1) ait une orientation opposée à celle de (T). La transformation définie par les formules (1) équivaut alors, manifestement, à une symétrie suivie d'un déplacement.

(1) Dans cette théorie, on ne fait pas de différence entre deux figures déduites l'une de l'autre par déplacement.

II. — Homothétie et similitude.

107. Soient un point fixe O appelé *centre d'homothétie* et un nombre algébrique h, appelé *rapport d'homothétie.* Le point M_1 de la droite OM tel que l'on ait

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = h$$

s'appelle homothétique de M. Si h est positif, l'homothétie est appelée *directe*; si h est négatif, elle est appelée inverse. Le cas de $h = -1$ est celui de la symétrie par rapport au point O. Rappelons brièvement quelques propositions fondamentales.

Les figures F_1 et F_2 homothétiques d'une même figure F par rapport à deux centres O_1 et O_2, dans un même rapport, peuvent se déduire l'une de l'autre par translation. On peut donc, pour rechercher les homothétiques d'une figure donnée, disposer de la situation du centre d'homothétie ; ainsi, l'on voit immédiatement que tout homothétique d'un cône est un cône égal, en prenant le centre au sommet. Inversement, pour chercher si deux figures sont homothétiques, on peut appliquer à l'une une translation ; ainsi deux cercles d'un même plan possèdent cette propriété, et de deux façons ; il suffit, pour le voir, de se ramener par translation au cas de deux cercles concentriques.

Pour que deux figures soient homothétiques, il faut et il suffit qu'en prenant un couple particulier A, A_1 de points correspondants et un couple quelconque M, M_1 de tels points, les segments AM et A_1M_1 soient parallèles et dans un rapport algébrique constant

$$\frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{AM}} = h;$$

h sera précisément le rapport d'homothétie. Dans le cas où $h = 1$, la transformation se réduit à une translation, le centre d'homothétie étant rejeté à l'infini. La translation peut donc être regardée

comme un cas limite de l'homothétie. Ces deux transformations conservent d'ailleurs individuellement chaque point du plan de l'infini.

De la proposition précédente, on en déduit une autre, très importante :

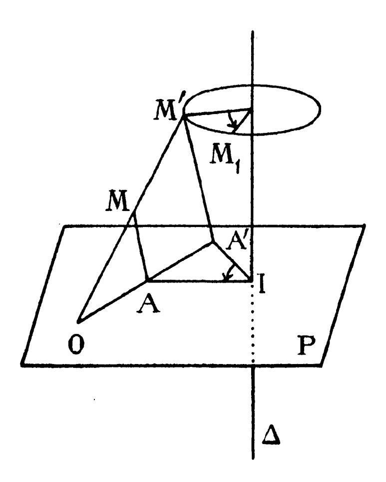
Deux figures homothétiques d'une même troisième sont homothétiques entre elles, et les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.

Analytiquement, une homothétie de centre (a, b, c), dans le rapport h, sera définie par les formules

$$x_1 - a = h(x - a), \qquad y_1 - b = h(y - b), \qquad z_1 - c = h(z - c).$$

108. Similitude. — Soit une figure F. Transformons-la par homothétie en une figure F′, puis déplaçons F′ de manière à obtenir une nouvelle figure F″. On appelle *similitude* la transformation qui fait passer de F à F″. Elle peut s'opérer en faisant successivement une homothétie, une translation, une rotation. L'ensemble de ces deux premières opérations est encore une homothétie ; en définitive *toute similitude résulte d'une homothétie, suivie d'une rotation.*

Soient O le centre de l'homothétie, Δ l'axe de la rotation. Cherchons s'il existe des points confondus avec leurs correspondants. L'homothétie fait passer du point M au point M′ et la rotation du point M′ au point M_1. Par rapport au plan P, mené de O perpendiculairement à Δ, les cotes de M_1 et de M sont entre elles dans un rapport égal au rapport d'homothétie. Donc M et M_1 ne peuvent coïncider que si M est situé dans le plan P. Soit A un point du plan P, susceptible de se confondre avec son correspondant. L'homothétie lui fait correspondre un point A′ tel qu'on ait



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = h.$$

Dans le plan P, la rotation qui a pour centre le pied I de Δ transforme A′ en A, de sorte que l'angle $(\widehat{IA', IA})$ a une grandeur et un sens égaux à ceux de l'angle de la rotation. On peut donc aisément construire une figure qui soit semblable à la figure IOAA′ du plan P

et de même sens qu'elle : le problème n'a qu'une solution. Connaissant OI, il est ensuite facile de construire IOAA' et par suite d'obtenir le point A, qui est unique. On lui donne le nom de *point double* de la similitude. Menons AM et AM_1. Le morceau de droite AM_1 se déduit de A'M' par la rotation d'axe Δ précédemment considérée. On en conclut que la droite indéfinie AM_1 se déduit de AM par une rotation du même angle, autour de l'axe parallèle à Δ mené par le point A. En définitive, pour déduire M_1 de M, on peut faire une rotation suivie d'une homothétie, le centre de l'homothétie étant sur l'axe de la rotation.

Si l'on prend pour origine le point double de la similitude, les coordonnées de deux points correspondants M et M_1 sont liées par des relations de la forme

$$x = mx_1 + m'y_1 + m''z_1, \qquad y = nx_1 + n'y_1 + n''z_1,$$
$$z = px_1 + p'y_1 + p''z_1,$$

ces neuf coefficients étant liés par les cinq relations

$$m^2 + n^2 + p^2 = m'^2 + n'^2 + p'^2 = m''^2 + n''^2 + p''^2,$$
$$m'm'' + n'n'' + p'p'' = m''m + n''n + p''p = mm' + nn' + pp' = 0.$$

L'élève trouvera ces formules en se souvenant que la transformation se ramène à une rotation des axes autour de O, suivie d'une homothétie. On passe aisément du cas particulier précédent au cas général. On obtient

$$x = a + mx_1 + m'y_1 + m''z_1, \qquad y = b + nx_1 + n'y_1 + n''z_1,$$
$$z = c + px_1 + p'y_1 + p''z_1,$$

les coefficients $m, n, \ldots, p''$ étant liés par les cinq relations précédentes. Nous continuerons plus généralement à donner le nom de similitude à toute transformation de cette forme, dont les coefficients obéissent à ces relations, alors que certains de ces coefficients peuvent devenir imaginaires.

Remarque. — En recherchant les points doubles, nous n'avons envisagé que les points à distance finie. En utilisant des coordonnées homogènes, on peut voir, par un calcul facile, que la transformation admet trois autres points doubles, qui sont le point à l'infini sur Δ et les points cycliques du plan P.

On vérifiera aussi très aisément que toute similitude conserve globalement le cercle de l'infini.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la théorie de la similitude plane. Une telle transformation admet trois points doubles dont l'un est à distance finie. Les deux autres sont les points cycliques.

III. — Transformation linéaire.

109. Reprenons les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a + mx_1 + m'y_1 + m''z_1, \\ y = b + nx_1 + n'y_1 + n''z_1, \\ z = c + px_1 + p'y_1 + p''z_1, \end{cases}$$

où nous ne supposons exister aucune relation particulière entre les m, m', ..., p''. Toutefois, imposons à ces coefficients la condition que les trois plans

$$mx_1 + m'y_1 + m''z_1 = 0, \qquad nx_1 + n'y_1 + n''z_1 = 0,$$
$$px_1 + p'y_1 + p''z_1 = 0$$

forment un véritable trièdre ; s'il en est ainsi, nous sommes assurés qu'à chaque point M correspond un point M_1 et un seul, dont on obtient les coordonnées en résolvant les équations (1) par rapport à x_1, y_1, z_1.

La transformation ainsi définie s'appelle, à cause de la forme des équations qui la définissent, une *transformation linéaire*. Il est manifeste qu'elle englobe comme cas particuliers toutes celles qui ont été étudiées jusqu'à présent.

Une telle transformation fait correspondre à une courbe ou à une surface algébrique une courbe ou une surface algébrique de même ordre. Elle conserve globalement le plan de l'infini, il s'ensuit que deux droites parallèles, deux plans parallèles se transforment aussi en deux droites parallèles, deux plans parallèles. Enfin, le rapport algébrique de deux segments d'un même axe est conservé par la transformation. En effet, appelons Δ_1 l'axe décrit par le point M_1 et ρ_1 l'abscisse sur cet axe, à partir d'une certaine origine, du point M_1. Sur l'axe transformé Δ décrit par M, soit ρ l'abscisse de M, à partir d'une certaine origine. Puisque x_1, y_1, z_1 sont des fonctions linéaires de ρ_1, en même temps que x est linéaire en ρ, il résulte de la première des équations (1) que ρ est une fonction linéaire de ρ_1,

$$\rho = A + B\rho_1.$$

On en déduit aisément, en désignant par ρ', ρ'_1, par ρ'', ρ''_1, des couples de valeurs correspondantes de ρ et de ρ_1, l'égalité suivante :

$$\frac{\rho'-\rho}{\rho''-\rho}=\frac{\rho'_1-\rho_1}{\rho''_1-\rho_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MM'}}{\overline{MM''}}=\frac{\overline{M_1M'_1}}{\overline{M_1M''_1}},$$

qui exprime le théorème annoncé.

Considérons quatre points, O, A, B, C, non situés dans un même plan, et soient O', A', B', C' leurs transformés. Le transformé du point M tel que

$$\mathbf{OM}=\xi\mathbf{OA}+\eta\mathbf{OB}+\zeta\mathbf{OC}$$

sera le point M' tel que

$$\mathbf{O'M'}=\xi\mathbf{O'A'}+\eta\mathbf{O'B'}+\zeta\mathbf{O'C'}.$$

En effet, le parallélépipède admettant OM pour diagonale et OA, OB, OC comme directions d'arêtes se transformera en un parallélépipède admettant O'M' pour diagonale et O'A', O'B', O'C' pour directions d'arêtes. Soient OP, OQ, OR les arêtes issues de O dans le premier de ces parallélépipèdes, O'P', O'Q', O'R' celles qui sont issues de O' dans le second. Nous aurons d'après ce qui précède

$$\xi=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{O'P'}}{\overline{O'A'}}, \quad \eta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{O'Q'}}{\overline{O'B'}} \quad \text{et} \quad \zeta=\frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{O'R'}}{\overline{O'C'}},$$

ce qui établit le théorème.

D'après cela, dans l'espace, la donnée de quatre points non situés dans un même plan et de leurs correspondants détermine une transformation linéaire. Dans le plan, on donnerait de même trois points non alignés et leurs correspondants.

Considérons deux plans P et P_1 non parallèles et une direction fixe Δ. A chaque point M du plan P il correspond un point M_1 et un seul du plan P_1 tel que la droite MM_1 soit parallèle à Δ. Il est clair que cette transformation, qui fait correspondre un point du plan P à un point du plan P_1, est linéaire, car en appelant O, A, B trois positions du point M, O_1, A_1, B_1 les positions correspondantes de M_1, on prouve facilement (question

proposée) que la relation

$$\mathbf{OM} = \xi\mathbf{OA} + \eta\mathbf{OB}$$

entraîne

$$\mathbf{O_1M_1} = \xi\mathbf{O_1A_1} + \eta\mathbf{O_1B_1}.$$

En résumé, *la projection cylindrique est donc un cas particulier de la transformation linéaire.*

IV. — Transformations homographiques. — Étude de la relation homographique. — Rapport anharmonique. — Applications.

110. Nous utiliserons maintenant des coordonnées homogènes. A un point M(X, Y, Z, T) faisons correspondre le point M_1 dont les coordonnées homogènes X_1, Y_1, Z_1, T_1 sont définies par des relations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = AX + A'Y + A''Z + A'''T, \\ Y_1 = BX + B'Y + B''Z + B'''T, \\ Z_1 = CX + C'Y + C''Z + C'''T, \\ T_1 = DX + D'Y + D''Z + D'''T, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont linéaires et homogènes en X, Y, Z, T ; supposons les coefficients tels qu'inversement, à chaque point M_1 corresponde un point M et un seul, X, Y, Z, T s'exprimant aussi par des expressions linéaires et homogènes en X_1, Y_1, Z_1, T_1. La transformation ainsi définie s'appelle une *transformation homographique*. Comme les précédentes, qu'elle englobe, elle conserve l'ordre de toute courbe ou de toute surface algébrique.

Si l'on change d'axes de coordonnées, quels que soient les trièdres, distincts ou confondus, auxquels on rapporte deux points M et M_1 correspondants, les relations qui lient les coordonnées homogènes de ces points conservent la forme précédente, ce qui justifie la définition.

Soient dès lors sur une droite D et sa transformée D_1 deux points correspondants M et M_1. La relation qui existe entre les

abscisses de ces points, connue sous le nom de *relation homographique,* mérite de fixer notre attention ; son étude est importante pour maintes questions d'algèbre et de géométrie.

111. Relation homographique. — Pour fixer les idées, supposons que D et D_1 soient à distance finie([1]). Choisissons les coordonnées, de manière à rapporter le point M à un premier trièdre $Oxyz$, dont l'axe Ox se confonde avec D, et son correspondant M_1 à un second système $O_1x_1y_1z_1$, dont l'axe O_1x_1 soit confondu avec D_1. La relation entre les abscisses

$$x = \overline{OM} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \overline{O_1M_1}$$

de M et M_1 s'obtient en annulant dans les formules qui définissent la transformation les deux coordonnées homogènes Y et Z. Elle est donc de la forme

$$x_1 = \frac{X_1}{T_1} = \frac{AX + A'''T}{DX + D'''T} = \frac{Ax + A'''}{Dx + D'''},$$

ou, en changeant les notations,

$$(2) \qquad x_1 = \frac{ax + b}{cx + d},$$

ce qu'on peut encore mettre sous la forme

$$(3) \qquad \alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0.$$

On donne le nom de *relation homographique* à toute relation entre x et x_1 de l'un des types équivalents (2) ou (3). Supposons que, dans (2), les coefficients a, b, c, d soient tels que la quantité $ad - bc$ ne soit pas nulle, ce qui revient encore à dire, lorsqu'on envisage la relation (3), que son premier membre n'est pas le produit d'une fonction linéaire de x par une fonction linéaire de x_1. Moyennant cette hypothèse, on aperçoit immédiatement la propriété suivante :

Si x et x_1 sont liés homographiquement, à chaque valeur de x correspond une valeur unique de x_1, et, de même, à chaque valeur de x_1 correspond une valeur unique de x.

([1]) Nous pouvons nous contenter d'étudier ce cas, voyez n° 38.

THÉORÈME RÉCIPROQUE. — *Si deux variables x et x_1 sont liées algébriquement de manière qu'à chaque valeur de l'une corresponde une valeur unique de l'autre, x et x_1 sont liées homographiquement.*

Dans cet énoncé, il est entendu qu'on doit considérer indifféremment toutes les valeurs, réelles ou imaginaires, de x et x_1. Cela posé, soit

$$(4) \qquad f(x, x_1) = 0$$

la relation qui lie x et x_1 ; son premier membre est un polynome en x et x_1 ; distinguons deux cas.

1° Le polynome f est indécomposé. L'équation (4) représente, par rapport à deux axes Ox, Ox_1, une certaine courbe algébrique, d'ordre inconnu m. En traduisant l'hypothèse, nous obtenons les résultats suivants : le point à l'infini sur Ox, aussi bien que le point à l'infini sur Ox_1, ont pour ordre $m-1$ sur cette courbe. Donc l'ensemble des termes de plus haut degré contient en facteur $x^{m-1}\,x_1{}^{m-1}$. Par suite, le degré $2m-2$ de ce monome est au plus égal au degré m de la courbe, qui, de ce fait, ne peut dépasser deux. En prenant $m = 2$, on obtient une relation de la forme (3) ; en prenant $m = 1$, on obtient une relation linéaire, c'est-à-dire une relation de même forme avec $\alpha = 0$.

2° Si f est un produit de facteurs, ceux-ci ne peuvent être distincts, sans quoi chacun d'eux, égalé à zéro, fournirait pour x une valeur de x_1 différente de celles qui résultent des autres facteurs. Dans ce cas, f est donc une puissance d'un polynome indécomposable ; on est ainsi ramené au cas précédent.

REMARQUE. — Lorsque x et x_1 sont liées homographiquement, on dit aussi que chacune de ces variables est une fonction homographique de l'autre. D'après ce que nous avons vu, toute fonction homographique de x est de la forme

$$\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Il importe de remarquer que si x_1 est fonction homographique de x, toute fonction homographique de x_1 est aussi fonction homographique de x.

112. Rapport anharmonique. — Appliquons la remarque ci-dessus à la fonction homographique suivante de x_1 :

$$(5) \qquad \frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_1''}.$$

Par x_1' et x_1'' nous entendons désigner des valeurs particulières de x_1 auxquelles correspondent pour x des valeurs que nous appellerons respectivement x' et x''. D'après notre remarque, l'expression (5) est une fonction homographique de x.

$$(6) \qquad \frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_1''} = \frac{Ax + B}{Cx + D}.$$

Cherchons à déterminer, autant que faire se peut, les coefficients A, B, C, D du second membre. Quand on fait $x = x'$, il vient $x_1 = x_1'$. Le premier membre s'annule ; il en est de même de $Ax + B$, qui contient donc en facteur $x - x'$. Quand on fait $x = x''$, il en résulte $x_1 = x_1''$; le premier membre devient infini ; le second possédant la même propriété, il faut donc que $Cx + D$ soit divisible par $x - x''$. Par suite, en désignant par h une constante, on peut mettre l'identité (6) sous la forme

$$(7) \qquad \frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_1''} = h\frac{x - x'}{x - x''}.$$

Pour déterminer la valeur de h, donnons à x une troisième valeur particulière x^0, à laquelle correspond pour x_1 la valeur x_1^0. Écrivons que la relation (7) a lieu pour ce système particulier, puis divisons-la membre à membre par l'égalité ainsi obtenue. Il vient

$$(8) \qquad \frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_1''} : \frac{x_1^0 - x_1'}{x_1^0 - x_1''} = \frac{x - x'}{x - x''} : \frac{x^0 - x'}{x^0 - x''}.$$

Cette identité nous conduit à poser la définition suivante :

Considérons quatre nombres a, b, c, d, d'ordre fixé. On représente par (a, b, c, d) et on appelle *rapport anharmonique* de ces nombres la quantité

$$(a, b, c, d) = \frac{a - c}{a - d} : \frac{b - c}{b - d}.$$

L'identité précédente peut maintenant se traduire par l'énoncé suivant :

Si x_1 est lié homographiquement à x, le rapport anharmonique de quatre valeurs de x_1 est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de x.

Ce résultat, appliqué aux transformations homographiques,

entraîne une conséquence importante. Appelons rapport anharmonique de quatre points d'une droite celui de leurs abscisses par rapport à une origine, d'ailleurs indifférente, sur cette droite. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

A quatre points alignés, une transformation homographique fait correspondre quatre points alignés et de même rapport anharmonique.

REMARQUES. — I. Nous avons montré que toute correspondance homographique conserve le rapport anharmonique. Inversement, pour définir une correspondance homographique entre deux variables x et x_1, nous pourrons partir d'une égalité de la forme

$$(xx^0x'x'') = (x_1x_1^0x_1'x_1'') ;$$

cela nous montre que, *pour déterminer une homographie, il faut connaître trois couples de valeurs correspondantes.*

II. — Lorsque x croît indéfiniment, la quantité $(xx^0x'x'')$ tend vers $\dfrac{x^0 - x''}{x^0 - x'}$; on convient de représenter cette limite par le symbole $(\infty x^0x'x'')$.

113. Divisions homographiques. — Soient deux droites D et D_1 : orientons-les et choisissons sur chacune d'elles une origine. Soient M et M_1 deux points pris sur chacune de ces droites, x et x_1 leurs abscisses respectives ; établissons entre elles une relation homographique

(3) $$\alpha xx_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0.$$

On dit que les points M et M_1 se correspondent homographiquement sur D et sur D_1, ou encore qu'ils décrivent des divisions homographiques : D et D_1 s'appellent les bases de ces divisions.

Supposons d'abord que α ne soit pas nul. Au point à l'infini sur D correspond un point K_1 à distance finie sur D_1. De même, appelons L le point de D auquel s'associe le point à l'infini de D_1. Désignons maintenant par M^0, M_1^0 un couple particulier de points correspondants. Exprimons la conservation du rapport anharmonique, en introduisant un quatrième couple formé de

deux points correspondants quelconques M et M_1 ; il vient

$$(MM^0 \infty L) = (M_1 M_1^0 K_1 \infty),$$

ou encore

$$\overline{ML} . \overline{M_1K_1} = \overline{M^0L} . \overline{M_1^0K_1}.$$

On donne aux points L et K_1 le nom de *points limites* des divisions. Si sur chaque division on prend l'origine des abscisses au point limite, on voit que le produit des abscisses de deux points correspondants est constant.

Supposons maintenant $\alpha = 0$; les points à l'infini sur D et sur D_1 se correspondent ; l'élève montrera que, dans ces conditions, le rapport d'un segment pris sur D au segment correspondant de D_1 est constant.

Cas où les bases des divisions coïncident. — Supposons que D_1 soit confondu avec D ; prenons alors, pour l'une et l'autre division, une origine unique. Cherchons les points qui coïncident avec leurs transformés. Nous sommes amenés à résoudre l'équation du second degré

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0, \qquad (\alpha \text{ étant supposé } \neq 0).$$

Il y a donc deux points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, qui jouissent de la propriété précédente : on les appelle *points doubles* de l'homographie. Supposons-les distincts, soient D et D'. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de deux points correspondants quelconques avec les points doubles est constant.

En effet, introduisons deux couples de points correspondants, l'un M^0, M_1^0 particularisé, l'autre M, M_1 quelconque, et exprimons la conservation du rapport anharmonique. Nous avons

$$(MM^0DD') = (M_1M_1^0DD'),$$

d'où l'on déduit aisément

$$(MM_1DD') = (M^0M_1^0DD'),$$

égalité qui établit la proposition.

Dans le cas où les deux points doubles coïncident, on démontre que la relation entre les abscisses de M et de M_1 peut se mettre

sous la forme

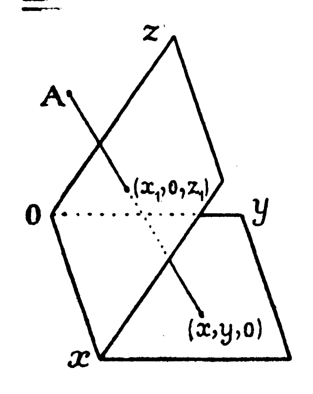
$$\frac{1}{x_1 - \lambda} = \frac{1}{x - \lambda} + \mu;$$

nous proposons, à titre d'exercice, de vérifier cette proposition.

114. Cas particulier de la transformation homographique: perspective. — Nous avons défini la transformation homographique d'une manière tout à fait générale, en envisageant de suite la correspondance entre deux points de l'espace. Particularisant, nous venons d'étudier le mode de correspondance qui en résulte, entre un point M d'une droite D et le point transformé M_1 de la droite D_1 provenant de D. De même, il y a lieu de chercher quel est le mode de correspondance créé par la transformation entre un point M d'un plan Q et le point correspondant M_1 du plan Q_1 provenant de Q. En supposant ces plans à distance finie, choisissons les coordonnées de manière à rapporter le point M à un système $Oxyz$ dans lequel le plan Oxy soit confondu avec Q, à rapporter de même M_1 à un système $O_1x_1y_1z_1$ dans lequel le plan $O_1x_1y_1$ soit confondu avec Q_1. La correspondance considérée s'obtient alors en établissant, entre les coordonnées homogènes X, Y, T de M dans le plan Oxy et celles X_1, Y_1, T_1 de M_1 dans le plan $O_1x_1y_1$, des relations de la forme

$$X_1 = AX + BY + DT,$$
$$Y_1 = A'X + B'Y + D'T,$$
$$T_1 = A'''X + B'''Y + D'''T,$$

c'est-à-dire de la forme même que nous aurions été amenés à envisager si nous avions, au préalable, exposé la théorie des transformations homographiques en géométrie à deux dimensions. De même que la correspondance homographique entre deux points sur des droites peut se définir indépendamment de la transformation à trois dimensions, de même, nous avons aussi le moyen de définir une correspondance homographique entre les points de deux plans.



Un exemple de telle correspondance est fourni par la perspective. Considérons le plan du tableau et un plan qui le coupe suivant une droite, que nous prenons pour axe Ox. Choisissons l'axe Oy dans le plan du tableau, l'axe Oz dans l'autre plan. Etudions la correspondance entre un point $(x_1, 0, z_1)$ du plan xOz et

sa perspective $(x, y, 0)$ du plan xOy, faite d'un point de vue A de coordonnées a, b, c. Pour évaluer x_1 et z_1 en fonction de x, y, il suffit d'écrire que le point projeté et sa perspective sont alignés avec le point A, ce qui donne

$$x_1 = \frac{ay - bx}{y - b}, \qquad z_1 = \frac{cy}{y - b},$$

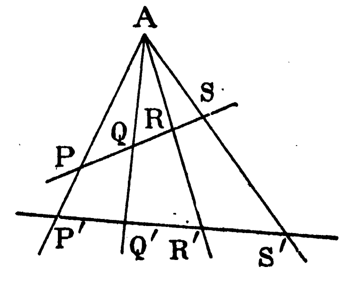
formules qui, en coordonnées homogènes, peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} X_1 &= aY - bX, \\ Z_1 &= cY, \\ T_1 &= Y - bT. \end{aligned}$$

Ainsi, *la perspective est un cas particulier de la transformation homographique.*

Cette proposition entraîne d'importantes conséquences.

115. Rapport anharmonique de quatre droites ou de quatre plans appartenant à un même faisceau linéaire. — Soient, dans un plan, quatre droites concourantes (ou parallèles). Si on les coupe par une sécante, le rapport anharmonique des quatre points obtenus est indépendant de la position de la sécante. En effet, considérons deux positions de la sécante : les deux points où elles sont rencontrées par chacune de nos quatre droites sont en perspective par rapport à leur point de concours A. Donc les quatre couples (P, P′), (Q, Q′), (R, R′), (S, S′) se correspondent dans deux divisions homographiques (voir n° 114) et l'on a



$$(PQRS) = (P'Q'R'S').$$

La valeur commune des deux membres s'appelle *rapport anharmonique du faisceau des quatre droites.*

Soient de même quatre plans passant par une droite D. Si on les coupe par deux plans quelconques, on obtient deux faisceaux de quatre droites qui ont le même rapport anharmonique, car ils sont en perspective par rapport à tout point de D. D'où la notion de rapport anharmonique de quatre plans : cette quantité est égale indifféremment au rapport anharmonique du faisceau des

quatre droites déterminées par un plan sécant, ou à celui des quatre points de rencontre des plans avec une sécante quelconque (établir ce dernier fait).

116. Expression analytique du rapport anharmonique de quatre points alignés, de quatre plans d'un faisceau, etc... — Soient d'abord quatre points alignés. Paramétrons la droite qui les porte, en utilisant l'un des modes indiqués au n° 7; les coordonnées d'un point de la droite seront des fonctions linéaires de ρ ou des fonctions homographiques de λ. Par définition, le rapport anharmonique de quatre points de la droite est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de ρ [1]. Il est donc égal aussi indifféremment :

1° à celui des valeurs d'une des coordonnées des quatre points;

2° à celui de leurs λ.

On a donc

$$(M_1M_2M_3M_4) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$
$$= (z_1, z_2, z_3, z_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Considérons maintenant quatre plans appartenant au faisceau défini par les deux plans

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Un plan quelconque du faisceau est

$$(\varpi_\lambda) \qquad P + \lambda Q = 0.$$

Nous laissons à l'élève le soin de vérifier qu'en développant P et Q et en cherchant l'intersection du plan ϖ_λ avec Ox, l'abscisse du point d'intersection est liée homographiquement à λ. D'où ce théorème :

Le rapport anharmonique de quatre plans passant par la droite $P = Q = 0$ *est égal à celui de leurs* λ.

Proposition analogue en géométrie plane :

Le rapport anharmonique de quatre droites passant par

[1] Ceci est immédiat quand ρ désigne l'abscisse du point mobile sur la droite; sinon, ρ désigne une quantité proportionnelle à cette abscisse, donc ρ est une fonction linéaire de cette abscisse, etc.

le point commun à deux droites $P=0$, $Q=0$ *est celui de leurs* λ [1].

Remarque. — Lorsque le rapport anharmonique est égal à -1, la division formée par les quatre points ou le faisceau formé par les quatre plans est une division ou un faisceau harmonique.

117. Faisceaux homographiques. — Soient deux droites fixes D et D_1. Menons par D un plan variable, que nous supposerons être représenté par

$$(\varpi_\lambda) \qquad P+\lambda Q=0.$$

Par D_1 menons de même un autre plan, représenté par

$$(\varpi_{\lambda_1}) \qquad P_1+\lambda_1 Q_1=0.$$

S'il existe entre λ et λ_1 une relation homographique, on dit que les plans ϖ_λ et ϖ_{λ_1} décrivent des faisceaux homographiques autour des droites D et D_1. Le rapport anharmonique de quatre plans passant par D est égal à celui des quatre plans correspondants passant par D_1. Lorsque D_1 coïncide avec D, il y a dans le faisceau deux plans doubles, réels ou imaginaires, distincts ou confondus. S'ils sont distincts, le rapport anharmonique de deux plans correspondants quelconques avec ces plans doubles est constant, etc... Enfin que D ou D_1 soient distinctes ou confondues, deux plans correspondants ϖ_λ et ϖ_{λ_1} déterminent sur une sécante des divisions homographiques.

L'élève définira de même, en géométrie plane, des faisceaux homographiques de droites et en développera la théorie parallèlement à la précédente.

Exemple. — Considérons une courbe algébrique du second ordre, non réduite à un système de deux droites. Prenons sur cette courbe deux points fixes A et B et un point mobile M. Lorsque M varie, les droites MA et MB décrivent des faisceaux homographiques.

---

[1] En particulier, ce rapport anharmonique est égal à celui de leurs coefficients angulaires.

En effet, puisque la courbe est du second ordre, si nous nous donnons une droite issue de A, son second point de rencontre M avec la courbe est déterminé d'une manière unique. Donc à un rayon MA correspond un seul rayon MB. Inversement, si MB est donné, MA en résulte et le problème n'a qu'une solution. Donc, en vertu du théorème démontré au nº 111, les droites MA et MB se correspondent homographiquement. (C. q. f. d.)

De cette proposition découle la notion de rapport anharmonique de quatre points d'une courbe du second ordre. Prenons sur une telle courbe quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Joignons-les à un point quelconque, pris également sur la courbe. Le faisceau de quatre droites ainsi obtenues a un rapport anharmonique constant. En effet, si nous joignons M_1, M_2, M_3, M_4 à un premier point A, puis à un second point B de la courbe, les droites AM_1 et BM_1, AM_2 et BM_2, AM_3 et BM_3, AM_4 et BM_4 forment des couples de rayons correspondants de deux faisceaux homographiques de sommets A et B. D'où l'égalité

$$(AM_1, AM_2, AM_3, AM_4) = (BM_1, BM_2, BM_3, BM_4);$$

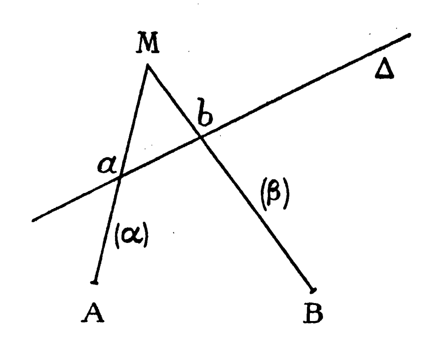
elle établit que le rapport anharmonique du faisceau considéré est indépendant du choix de son sommet sur la courbe : on l'appelle *rapport anharmonique des quatre points sur la courbe du second ordre* considérée.

118. Applications. Génération des courbes et des surfaces du second ordre. — Pour montrer la fécondité des notions précédentes, nous les appliquerons à la recherche d'un certain nombre de lieux géométriques. Les résultats que nous allons obtenir sont des plus importants.

Problème I. — *Soient, dans un plan, deux points fixes* A *et* B, *une droite* (α) *passant par* A, *et une droite* (β) *passant par* B *et en correspondance homographique avec* (α). *Trouver le lieu du point de rencontre de* (α) *et de* (β).

Ce lieu est manifestement *une courbe algébrique*. Cherchons-en l'ordre ; coupons-la par une sécante Δ. Une droite (α) et la droite (β) correspondante coupent Δ en deux points *a* et *b*, liés homographiquement : les points du lieu situés sur Δ sont juste-

ment les points doubles de cette homographie ; puisqu'il y en a deux, le lieu est *du second ordre*. On voit d'ailleurs aisément que les points A et B en font partie (confondre l'une des droites (α) ou (β) avec AB,... etc.).



Il peut arriver que ce lieu se décompose en deux droites : cela se produit à condition que la droite AB, considérée comme appartenant à l'un des faisceaux, se corresponde à elle-même dans l'autre faisceau. En effet, supposons que le lieu comprenne une droite Δ. Soit C le point où Δ coupe AB. Il est clair que lorsque M décrit Δ, AM et BM engendrent des faisceaux homographiques (¹). En outre, quand M tend vers C, AM et BM tendent simultanément vers AB. Le lieu comprend donc en définitive les droites Δ et AB. Inversement, *toutes les fois que, dans deux faisceaux homographiques de sommets différents* A *et* B, *le rayon* AB *se correspond à lui-même, deux rayons correspondants se coupent en un point qui décrit une droite.* Soient en effet M_1 et M_2 deux points du lieu en dehors de AB. La droite M_1M_2 coupe AB en un point C : elle est coupée par deux rayons correspondants quelconques en deux points liés homographiquement. Dans cette homographie, il y a trois points qui coïncident avec leurs correspondants, c'est-à-dire trois points doubles. Donc chaque point est son propre correspondant : tous les points du lieu sont donc sur la droite M_1M_2.

Problème II. — *On donne deux droites fixes de l'espace* D *et* D_1. *Par* D *on fait passer un plan* P *et par* D_1 *un plan* P_1, *de manière que ces deux plans se correspondent homographiquement. Trouver le lieu de l'intersection* Δ *des plans* P *et* P_1.

(¹) La considération de la sécante Δ montre immédiatement que le rapport anharmonique de quatre positions de AM est égal à celui des quatre correspondantes de BM.

Ce lieu est une surface algébrique passant par D et D_1. En vertu du résultat obtenu en résolvant le problème précédent, toute section plane de cette surface est une courbe du second ordre. Donc le lieu est une surface du second ordre.

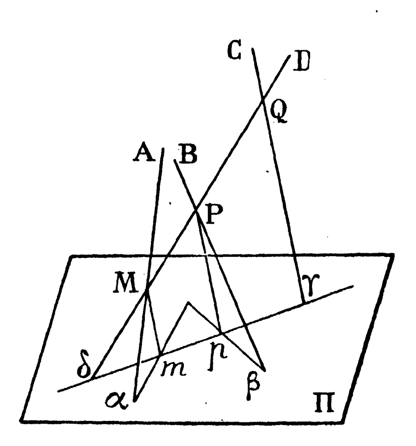
Si D et D_1 sont dans un même plan, cette surface se réduit à un cône ayant pour sommet leur point commun. Plus particulièrement, si le plan contenant les deux droites est son propre correspondant, il appartient au lieu, qui se décompose en ce plan et en un deuxième plan.

Problème III. — *On donne, dans l'espace, deux droites fixes* D *et* D_1. *On prend sur* D *un point* M *et sur* D_1 *un point* M_1, *ces deux points étant liés homographiquement. Trouver le lieu de la droite* MM_1.

Les plans M, D_1 et M_1, D se correspondent homographiquement et se coupent suivant la droite MM_1. On est ramené à la question précédente. Donc le lieu est une surface du second ordre passant par D et D_1.

Si D et D_1 sont dans un même plan, le lieu se réduit à ce plan, compté deux fois.

119. A titre d'application des résultats des deux précédentes questions, nous sommes maintenant à même d'établir le théorème suivant :

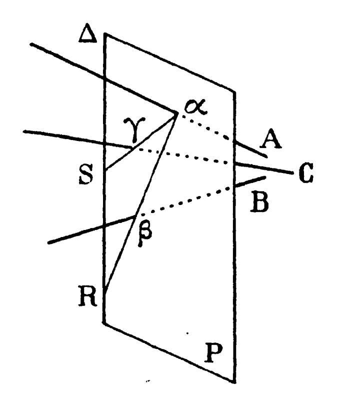


Théorème. — *Étant données trois droites* A, B, C *non situées deux à deux dans un même plan, le lieu des droites* D *qui s'appuient sur* A, B, C *est une surface du second ordre.*

Considérons en effet un plan auxiliaire Π, qui rencontre chacune des droites A, B, C, et soit une droite D du lieu. Sa pro-

jection cylindrique sur le plan Π, faite parallèlement à C, passe par la trace γ de C sur Π, qui est un point fixe, et par suite détermine sur les projections de A et de B deux points *m* et *p* liés homographiquement. Il y a donc aussi correspondance homographique entre les points M et P des droites A et B, dont *m* et *p* résultent par notre projection. Par suite, le lieu de D est bien une surface du second ordre. (C. q. f. d.)

120. Problème. — *Trouver l'intersection d'une droite et d'une surface du second ordre,* définie comme le lieu d'une droite qui s'appuie sur trois droites fixes A, B, C. Incidemment, *construire les points doubles de deux divisions homographiques de même base.*



Soit Δ la droite donnée. Par Δ menons un plan variable P, qui coupe A, B, C en des points α, β, γ. Les droites αβ et αγ rencontrent Δ en des points R et S.

Pour qu'un point de Δ soit sur la surface, il faut et il suffit que de ce point l'on puisse mener une droite qui rencontre à la fois A, B, C. Cette droite déterminerait avec Δ une position particulière de P, pour laquelle, les points α, β, γ étant alignés, R et S se confondraient.

Or la correspondance entre R et S est homographique; donnons-nous en effet l'un de ces points, le plan P, et par suite l'autre point, en résultent d'une manière unique; il suffit en effet de mener par un point connu (R ou S) une droite s'appuyant sur deux droites données (A et B, ou A et C).

Donc les points de rencontre cherchés sont les points doubles des divisions homographiques engendrées par R et S sur Δ. On détermine cette correspondance en prenant *trois couples de points homologues* : il reste à en *déduire les points doubles.*

On ramène ce problème à l'intersection d'une droite et d'un cercle.

Soient (R_1, S_1), (R_2, S_2), (R_3, S_3) trois couples de points homologues, et R, S un quatrième couple. Joignons ces divers points à un point O, extérieur à Δ, et par O, dans le plan O, Δ, menons un cercle quelconque qui coupe OR_1, OR_2, OR_3, OR aux points r_1, r_2, r_3, r et OS_1, OS_2, OS_3, OS en s_1, s_2, s_3, s. Nous avons (n° 117)

$$(r_1s_1, r_1s_2, r_1s_3, r_1s) = (s_1r_1, s_1r_2, s_1r_3, s_1r).$$

Le rayon r_1s_1 se correspondant à lui-même, les points de rencontre de

$$r_1s_2 \text{ et } r_2s_1, \qquad r_1s_3 \text{ et } r_3s_1, \qquad r_1s \text{ et } rs_1,$$

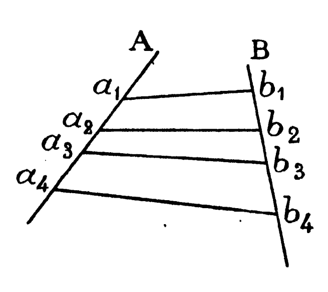
sont alignés sur une droite d. On connait deux points de cette droite. On peut la tracer. Les points où elle coupe le cercle correspondent manifestement aux points doubles sur Δ.

Remarque. — Les deux positions du plan P qui correspondent au cas où R et S se confondent sont précisément les plans tangents menés par Δ à la surface.

121. Propriétés des surfaces réglées du second ordre (1). — Considérons encore la surface engendrée par la droite D en s'appuyant sur les trois droites A, B, C. Deux positions de D ne sont jamais dans un même plan : une telle circonstance, si elle se produisait, serait en effet contraire à la supposition qu'il n'existe pas de plan contenant deux des droites A, B, C. Prenons trois positions particulières de D, soient D_1, D_2, D_3. Le lieu des droites qui rencontrent D_1, D_2, D_3 est une surface du second ordre, qui, ayant en commun six droites avec la surface donnée, se confond avec elle. Ceci nous démontre un fait très important :

Il existe, sur la surface, deux systèmes de génératrices rectilignes ; les droites D constituent l'un de ces systèmes ; il y en a un deuxième, dont A, B, C sont des génératrices particulières.

Ce qui précède montre en outre que deux génératrices d'un même système ne sont jamais contenues dans un plan ; par contre, il y a toujours un plan passant par deux génératrices de systèmes différents.



Enfin, quatre génératrices D_1, D_2, D_3, D_4 d'un même système coupent deux génératrices A et B de l'autre en deux systèmes de points qui se correspondent dans une homo-

(1) Nous avons vu (n° 77) que toute surface du second ordre est réglée, pourvu qu'on envisage indifféremment des droites réelles ou imaginaires. En géométrie réelle seulement, la distinction, parmi les surfaces du second ordre, de surfaces réglées ou non réglées, a sa raison d'être.

graphie, et par suite ont même rapport anharmonique :

$$(a_1a_2a_3a_4) = (b_1b_2b_3b_4).$$

La valeur commune des deux membres, indépendante de la génératrice choisie dans le système A, B, s'appelle *rapport anharmonique de quatre génératrices* D_1, D_2, D_3, D_4. C'est aussi celui des quatre plans déterminés par la droite A et chacun des points b_1, b_2, b_3, b_4, c'est-à-dire des plans tangents aux points a_1, a_2, a_3, a_4. Ceci nous démontre la propriété suivante :

Le rapport anharmonique de quatre plans tangents à une surface du second ordre en quatre points d'une génératrice est égal à celui des quatre points de contact.

122. Classification des propositions géométriques d'après leur manière de se comporter vis-à-vis des transformations précédentes. — Nous sommes maintenant à même de subdiviser les théorèmes de la géométrie en plusieurs groupes ; pour opérer cette subdivision, nous considérerons chaque proposition, et nous supposerons qu'on fasse subir *aux données mises en jeu dans l'hypothèse* une des transformations précédemment étudiées, à savoir :

1° ou bien une transformation homographique arbitraire ;
2° ou bien une transformation linéaire arbitraire ;
3° ou enfin une similitude quelconque.

Les données ayant été ainsi transformées, si la conclusion subsiste, nous dirons que la proposition a un caractère *projectif, linéaire,* ou *métrique,* suivant que la transformation qui, appliquée aux prémisses, conserve le résultat, est une transformation homographique, une transformation linéaire, ou une similitude [1]. Chacune de ces trans-

---

[1] Remarquons à cette occasion que *toute relation*

$$f(a, b, c, \ldots, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \ldots) = 0$$

qui traduit un théorème du type métrique, où les seules grandeurs mises en jeu sont certains angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, ... de la figure et les longueurs a, b, c, ... de certains de ses segments, *est homogène* par rapport à ces dernières, si du moins cette relation (supposée algébrique) ne résulte pas, par combinaison linéaire, d'un certain nombre d'autres, distinctes et de degrés différents. En effet, faisons une similitude dans le rapport h. La relation précédente doit entraîner, quel que soit h,

$$f(ha, hb, hc, \ldots, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \ldots) = 0.$$

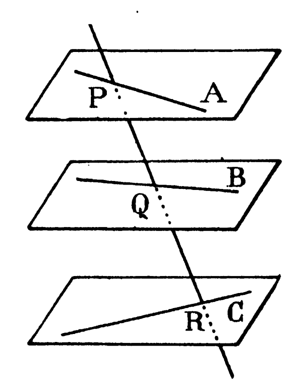
Il suffit alors de reprendre le raisonnement fait au n° 16, note (1), page 50.

formations est un cas particulier de la précédente ; il en résulte aisément qu'une propriété qui subsiste par une transformation linéaire subsiste par une similitude ; qu'une propriété qui subsiste par une transformation homographique subsiste par une transformation linéaire ou une similitude. Les réciproques sont évidemment fausses. Si une figure possède une propriété métrique déterminée, celle-ci ne s'applique pas aux figures qu'on en déduit par des transformations linéaires ou homographiques, etc...

Exemples. — Le théorème du carré de l'hypoténuse appartient *au type métrique* : en effet, il subsiste par une similitude, qui change un triangle rectangle en un autre triangle rectangle. Il en est de même de toutes les relations métriques ([1]) de la géométrie élémentaire : relations entre les éléments d'un triangle, d'un quadrilatère inscriptible, etc. De telles relations ne s'appliquent plus aux figures déduites de la figure initiale par des transformations linéaires ou homographiques, celles-ci modifiant les angles.

L'énoncé suivant, dont l'élève vérifiera l'exactitude, nous fournit un exemple de proposition rentrant dans le type linéaire :

Pour que trois droites A, B, C *de l'espace soient parallèles à un même plan, il faut et il suffit que le rapport des segments déterminés par elles sur une droite mobile qui les rencontre soit constant* :



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \text{const.}$$

Toute proposition du type linéaire pourra se vérifier analytiquement en faisant usage indifféremment d'axes rectangulaires ou d'axes obliques.

Enfin les propositions établies aux nos 118, 119, 121 sont autant d'exemples de propriétés projectives.

123. Avant de quitter cet ordre d'idées, qui nous permet de classer une proposition géométrique, et, par suite, nous donne une indication sur la nature du raisonnement qui la démontre, nous signalerons un théorème fondamental, qui met en évidence le rôle important joué par les éléments isotropes dans les propositions de caractère métrique.

---

1. *Note de la page précédente.*

Théorème. — *Toute propriété métrique d'une figure plane fournit une propriété projective de la nouvelle figure formée par la première et les points cycliques de son plan.*

En effet, une propriété métrique d'une figure F, appartenant à toute figure semblable, peut se traduire par une relation (ou plusieurs) entre certains angles de la figure F [1]. La démonstration du théorème actuel se ramène donc immédiatement à celle du suivant, dû à Laguerre :

L'angle de deux droites est une fonction du rapport anharmonique de l'angle qu'elles forment avec les droites isotropes menées par leur point de concours.

En effet, soient deux demi-droites OP et OQ, dont l'angle est égal à celui de deux demi-droites OA et OB. Tout revient à démontrer que l'égalité

$$(\widehat{OP, OQ}) = (\widehat{OA, OB})$$

entraîne la suivante :

$$(OP, OQ, OI, OJ) = (OA, OB, OI, OJ),$$

où I et J désignent les points cycliques. Or cela est évident si l'on remarque que les deux figures POQ et AOB se déduisent l'une de l'autre par une rotation, c'est-à-dire par une transformation homographique dans laquelle le point O, ainsi que les points I et J sont leurs propres transformés : il suffit d'exprimer la conservation du rapport anharmonique pour aboutir au résultat annoncé.

Remarque. — On peut d'ailleurs vérifier le théorème de Laguerre en calculant directement le rapport anharmonique des droites OP et OQ avec les droites isotropes OI et OJ. Soient m et m' leurs coefficients angulaires, les axes étant supposés rectangulaires ; nous avons, en appelant V l'angle des demi-droites,

$$(OP, OQ, OI, OJ) = \frac{m'-i}{m'+i} : \frac{m-i}{m+i} = \frac{1+mm'+i(m'-m)}{1+mm'-i(m'-m)}$$
$$= \frac{1+i\operatorname{tg} V}{1-i\operatorname{tg} V} \text{ [2]}.$$

[1] Cette possibilité résulte de l'homogénéité signalée dans la note du n° précédent. A cause de cette homogénéité, toute relation métrique qui fait intervenir, outre certains angles A, B, C ... de la figure, les longueurs de certains segments, peut être écrite de manière à ne mettre en jeu que les rapports de ces segments à l'un d'eux, rapports qui se ramènent, trigonométriquement, à des expressions ne contenant que des angles.

[2] Quand deux droites issues de O varient en faisant un angle constant, leur rapport anharmonique avec les droites isotropes demeure constant. Donc ces droites engendrent des faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les droites isotropes.

En particulier, pour que deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit qu'elles soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes.

On démontre, de même, qu'à toute propriété métrique d'une figure de l'espace correspond une propriété projective de la nouvelle figure formée par l'ensemble de la première et du cercle à l'infini.

Enfin, on établit qu'à toute propriété linéaire d'une figure correspond une propriété projective de celle qui est formée par l'ensemble de la première et du plan de l'infini (ou de la droite de l'infini, en géométrie plane).

V. — Inversion.

124. Soit O un point fixe appelé *pôle d'inversion* ; faisons correspondre à chaque point M le point M_1 de la droite OM tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = h,$$

h étant une constante qu'on appelle la *puissance d'inversion*. Le point M_1 est appelé l'inverse du point M. Si l'on prend le point O pour origine d'un système d'axes rectangulaires, on passe des coordonnées du point M à celles de M_1 par les formules

$$(1) \qquad x_1 = \frac{hx}{x^2+y^2+z^2}, \qquad y_1 = \frac{hy}{x^2+y^2+z^2}, \qquad z_1 = \frac{hz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Il est clair que la transformation est réciproque, c'est-à-dire que l'inverse de M_1 est le point M lui-même. Donc, si l'on résout les équations (1) en x, y, z, l'on trouvera

$$x = \frac{hx_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \qquad y = \frac{hy_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \qquad z = \frac{hz_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

Chaque point de la sphère Σ de centre O et de rayon $\sqrt{h}$ est conservé. A cette sphère, qui est réelle si h est un nombre réel et positif, nous donnerons le nom de sphère fondamentale.

Deux couples M, M_1 et N, N_1 de points inverses sont sur un

même cercle, en vertu de l'égalité

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = \overline{ON} \cdot \overline{ON_1}.$$

Il en résulte que les tangentes à deux courbes inverses en deux points correspondants M et M_1 forment un triangle isocèle avec la droite MM_1, et par suite sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de MM_1 [1] ; il s'ensuit que l'inversion conserve les angles que font entre elles les tangentes à deux courbes en un point commun.

Une sphère qui ne passe pas par le pôle est globalement conservée par une inversion dont la puissance est celle du pôle par rapport à cette sphère (n° 40). Si la puissance d'inversion est différente, la figure inverse est une sphère homothétique par rapport au pôle ; en effet, si, laissant fixe le pôle, on fait varier la puissance d'inversion, les diverses figures déduites d'une figure F sont homothétiques entre elles par rapport au pôle.

Une sphère qui passe par le pôle a pour inverse un plan perpendiculaire au diamètre du pôle.

Un cercle quelconque est l'intersection de deux sphères. Son inverse est donc un cercle, ou une droite si le cercle donné passe par le pôle.

125. Sphères et cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles. — L'inversion s'applique utilement à la théorie des cercles orthogonaux, des faisceaux de cercles, etc., et, réciproquement, ces notions géométriques facilitent la démonstration de certaines propositions relatives à l'inversion.

Deux cercles d'un plan sont dits *orthogonaux* lorsque les tangentes en leurs points de rencontre sont rectangulaires. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la distance des centres δ soit liée aux deux rayons R et R' par la relation

$$(2) \qquad \delta^2 = R^2 + R'^2.$$

Deux sphères sont orthogonales quand un plan contenant la

---

[1] Nous nous bornons à rappeler ces propositions, qui ont été vues dans la classe de Mathématiques.

ligne des centres les coupe suivant deux cercles orthogonaux. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la distance δ des centres soit liée encore aux rayons R et R' par la relation (2).

Enfin, on peut généraliser la définition de l'orthogonalité (mot pour mot) en l'étendant à deux cercles d'une sphère. Pour que cette orthogonalité ait lieu, il faut et il suffit que le plan de l'un des cercles contienne le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant l'autre.

L'inversion conservant les angles, deux sphères ou circonférences orthogonales donneront par cette transformation deux sphères ou circonférences orthogonales [1].

Quel que soit le pôle d'inversion, étant donnée une sphère, on peut toujours disposer de la puissance d'inversion de manière que cette sphère se transforme en elle-même ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la sphère fondamentale soit orthogonale à la sphère donnée.

Prenons maintenant un ensemble de deux sphères S et S' ayant respectivement pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0.$$

Si l'on veut faire une inversion qui transforme en elle-même (globalement) chacune de ces sphères, on ne peut plus choisir arbitrairement le pôle d'inversion. Celui-ci, devant avoir même puissance par rapport aux deux sphères, doit se trouver dans le plan

$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + 2(c' - c)z + d - d' = 0$$

(voyez au n° 40 l'expression de la puissance d'un point par rapport à une sphère). Ce plan est perpendiculaire à la ligne des centres ; il est à distance finie pourvu que les sphères ne soient pas concentriques. Moyennant cette restriction, les deux sphères ont, à distance finie, un cercle et un seul, réel ou imaginaire, contenu dans le plan précédent, auquel on donne le nom de *plan*

---

[1] Nous étendons le sens des mots « sphère » et « cercle » en considérant qu'un plan ou une droite peuvent être regardés comme une sphère ou un cercle de rayon infini.

radical des deux sphères. Un point de ce plan est le pôle d'une inversion qui conserve chacune des deux sphères, ou encore le centre d'une sphère orthogonale aux deux précédentes. Ainsi, le plan radical des sphères S et S′ est aussi le lieu des centres des sphères Σ orthogonales à la fois à S et S′.

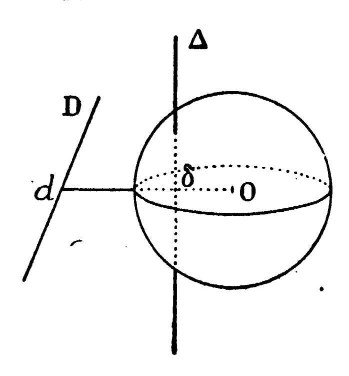
Considérons, non seulement les sphères S et S′, nón concentriques, mais encore l'ensemble des sphères, à un paramètre, qui passent par leur cercle commun à distance finie. Tout point du plan de ce cercle a même puissance par rapport à toutes ces sphères, et par suite est le centre d'une sphère orthogonale à l'une quelconque d'entre elles. Un tel système de sphères constitue par définition un *faisceau*. Toute sphère du faisceau a son centre sur l'axe du cercle (C) commun à S et S′. Un plan contenant cet axe coupe le faisceau de sphères suivant un système de cercles passant par deux points fixes, réels ou imaginaires. Un tel système constitue par définition un *faisceau plan de cercles*. La droite joignant les deux points fixes est l'axe radical commun à tous les cercles du faisceau.

Une inversion transforme manifestement un faisceau de sphères en un autre faisceau de sphères. De même, un faisceau plan de cercles est transformé en un faisceau de même nature si l'on a soin de choisir le pôle d'inversion dans le plan du faisceau donné.

Supposons maintenant qu'on transforme un faisceau plan de cercles en choisissant le pôle d'inversion en dehors du plan de la figure. On obtient, sur la sphère transformée de ce plan, l'ensemble des cercles qui passent par deux points fixes, réels ou imaginaires, de cette sphère ; un tel système constitue un *faisceau sphérique de cercles*. Soit D la droite qui joint les deux points fixes : tout cercle du faisceau est dans un plan mené par D, et par suite est orthogonal à n'importe quel cercle de contact d'un cône circonscrit ayant son sommet sur D. Ces cercles de contact forment à leur tour un faisceau, car ils passent par les points de contact des plans tangents menés de D à la sphère (qui sont les cercles de rayon nul du premier faisceau). Appelons Δ la droite qui joint ces deux points : tout cercle section d'un plan

passant par D est en définitive orthogonal à tout cercle section d'un plan passant par Δ. Les deux faisceaux sphériques qui correspondent aux droites D et Δ, dont la réciprocité est *évidente*, s'appellent *faisceaux conjugués* [1].

Supposons que D soit réelle et extérieure à la sphère. Les points fixes communs aux cercles du faisceau correspondant à D sont imaginaires ; dans ce faisceau, il y a, par contre, deux cercles de rayon nul qui sont réels. Dans l'autre faisceau, les cercles passent par deux points fixes réels, qui sont les centres des cercles de rayon nul du premier ; etc.



De ces propriétés, on déduit immédiatement celles des faisceaux plans de cercles. Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Les cercles orthogonaux à deux cercles d'un faisceau F le sont à tous les cercles de ce faisceau et forment un nouveau faisceau φ. Il y a réciprocité entre les faisceaux F et φ, qui sont dits *conjugués*. Dans le cas des éléments réels, la réalité des points fixes dans l'un des faisceaux exclut la réalité des cercles de rayon nul dans le même faisceau. Les points fixes de chaque faisceau sont les centres des cercles de rayon nul de l'autre ; à ces derniers, on donne communément le nom de points limites. En prenant pour pôle d'inversion un point limite de F, les cercles de φ deviennent des droites passant par l'inverse du second point limite de F. Par suite, les cercles de F deviennent des cercles concentriques.

Rappelons le théorème suivant : si les centres de trois sphères ne sont pas alignés, les plans radicaux de ces sphères, prises deux à deux, ont en commun une droite perpendiculaire au plan

---

[1] On donne aussi à D et Δ le nom de *droites conjuguées ;* elles le sont d'ailleurs aussi au point de vue de la théorie des pôles et polaires, c'est-à-dire qu'un point de D et un point de Δ sont conjugués harmoniques par rapport aux points de rencontre avec la sphère de la droite qui les joint.

des centres ; c'est l'axe radical des trois sphères. Tout point de cette droite est le centre d'une sphère orthogonale aux trois précédentes ; elle l'est aussi à toutes les sphères qui passent par les deux points à distance finie, communs aux trois premières. Ces sphères dépendent de deux paramètres ; on dit qu'elles forment un *réseau*. Remarquons que les sphères orthogonales aux sphères d'un réseau forment un faisceau, et réciproquement.

De même, étant donnés trois cercles d'un plan ou d'une sphère, qui n'appartiennent pas à un même faisceau, il existe un point et un seul qui a même puissance par rapport à ces trois cercles, à savoir le point commun aux axes radicaux des cercles pris deux à deux s'il s'agit de cercles d'un plan, ou bien le sommet du trièdre ayant pour faces les plans des cercles s'il s'agit de cercles d'une sphère.

126. Théorème. — *Étant données deux figures inverses, si on les transforme par une inversion quelconque, les deux nouvelles figures obtenues sont encore inverses l'une de l'autre.*

Pour démontrer ce théorème, nous établirons d'abord le lemme suivant :

Supposons qu'à chaque point M on fasse correspondre un point M_1, de manière qu'inversement à un point M_1 réponde un seul point M, et en outre que *deux couples* quelconques *de points correspondants soient sur un cercle. La transformation ainsi définie est une inversion* (ou une symétrie par rapport à un plan).

En effet, considérons deux couples particuliers A, A_1 et B, B_1 de points correspondants situés sur un cercle C, et un couple quelconque M, M_1. Soient γ le cercle contenant les quatre points A, A_1, M, M_1 et δ celui qui contient de même B, B_1, M, M_1. Par les cercles γ et δ passe une sphère (pouvant se réduire à un plan : dans ce cas l'élève achèvera le raisonnement), qui contient le cercle C (en effet le plan AA_1B la coupe suivant un cercle qui a trois points communs avec le cercle C). Donc la droite MM_1 passe par le point O, commun à AA_1 et BB_1, et l'on a

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = \overline{OA} \cdot \overline{OA_1}.$$

Donc la transformation est bien une inversion. Toutefois, ce raisonnement suppose que le point O est à distance finie ; si AA_1 et BB_1 sont parallèles, on voit aisément que la transformation se réduit à une symétrie par rapport au plan diamétral de la sphère perpendiculaire à AA_1 et BB_1. Pour assurer la généralité des énoncés, nous regar-

derons donc la symétrie par rapport à un plan comme un cas particulier de l'inversion.

Pour établir alors le théorème annoncé, considérons deux figures F et F_1, inverses l'une de l'autre, et soient φ et φ_1 les figures qu'on en déduit en leur appliquant une inversion de pôle quelconque. Soient M, M_1 et P, P_1 deux couples quelconques de points correspondants de F et F_1. Ces quatre points sont sur un même cercle, donc la même propriété appartient aux couples μ, μ_1 et ϖ, ϖ_1 transformés de φ et φ_1. La proposition en résulte, d'après le lemme précédent.

VI. — Involution.

127. Nous avons réservé pour la fin de ce chapitre l'étude de l'involution, bien que la relation involutive ne soit qu'un cas particulier de la relation homographique. Il nous sera en effet commode d'utiliser ici quelques-uns des résultats de la section précédente.

On dit qu'une relation homographique est *involutive* lorsqu'elle est symétrique en x et x_1, c'est-à-dire de la forme

(1) $$\alpha x x_1 + \beta(x + x_1) + \gamma = 0.$$

Considérons un axe orienté $x'x$ muni d'une origine O, et sur cet axe les points M et M_1 tels que l'on ait

$$\overline{OM} = x, \qquad \overline{OM_1} = x_1.$$

Si α est nul, le milieu du segment MM_1 est fixe. La correspondance entre M et M_1 sur l'axe est une symétrie. Si α n'est pas nul, la relation (1) peut s'écrire

$$\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \delta, \qquad \text{en posant} \qquad \delta = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \gamma.$$

Faisons sur l'axe $x'x$ un changement d'origine, la nouvelle origine I étant définie par

$$\overline{OI} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

La relation précédente peut s'écrire

$$\overline{IM} \cdot \overline{IM_1} = \delta.$$

Le point I s'appelle le *point central* de l'involution. Il correspond au point à l'infini, dans l'une et l'autre division ; en général, on peut ici parler de la correspondance de deux points, sans spécifier à quelle division chacun appartient, et cela en vertu de la symétrie de la relation (1).

L'involution engendrée sur $x'x$ par M et M_1 offre deux points doubles, réels ou imaginaires. Soient A et A'. Nous avons

$$\overline{IM} \cdot \overline{IM_1} = \overline{IA}^2,$$

relation qui exprime que *deux points correspondants sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles*. La valeur constante du rapport anharmonique de deux points correspondants avec les points doubles est donc ici — 1. (On démontrera, à titre d'exercice, la réciproque.)

Il en résulte que le fait, pour deux points, de se correspondre involutivement sur un axe, constitue une propriété projective.

Un faisceau plan de cercles détermine une involution sur une droite quelconque de son plan, deux points correspondants étant les points de rencontre de cette droite avec l'un des cercles. Le point central est situé sur l'axe radical du faisceau. Ce sont là des conséquences immédiates de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

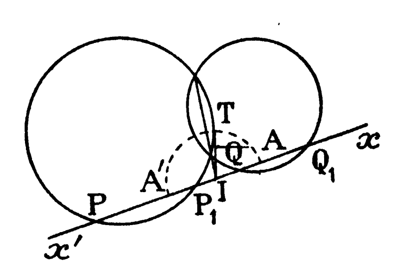
Une correspondance involutive est définie par la donnée de deux couples : soient en effet P, P_1 et Q, Q_1 deux couples de points associés ; et M, M_1 un autre couple quelconque. La relation d'involution étant réciproque, aux points P, Q, Q_1, M de la première division correspondent les points P_1, Q_1, Q, M_1 de la seconde. En vertu de la conservation du rapport anharmonique, on peut donc écrire

$$(P, Q, Q_1, M) = (P_1, Q_1, Q, M_1),$$

relation qui détermine complètement la correspondance entre M et M_1 [1].

[1] Cette relation met immédiatement en évidence la réciprocité du couple Q, Q_1 ; celle du couple P, P_1 y apparaît aussi ; on le vérifie en remarquant que l'égalité a lieu si on suppose que M vienne en P, M_1 en P_1 ou inverse-

On est donc amené à se poser le problème suivant : une involution étant définie par deux couples de points correspondants, trouver le point qui répond à un point quelconque. Soient encore P, P_1 et Q, Q_1 les deux couples donnés. Par P, P_1 on mène un cercle, puis par Q, Q_1 un autre cercle sécant au premier. Soit M un point quelconque de $x'x$: le point M_1 correspondant est à l'intersection de $x'x$ et du cercle qui passe par M et les points communs aux deux précédents. Dans le faisceau formé par ces cercles, les deux qui sont tangents à $x'x$ fournissent les points doubles A et A', etc.



128. Faisceaux involutifs. — Soient, sur une droite D, deux points M et M_1 liés involutivement. Joignons-les à un point fixe O, et soient μ et μ_1 les points de rencontre de OM et OM_1 avec une droite Δ. Les points μ et μ_1 sont liés involutivement sur Δ, quelle que soit cette droite. Nous pouvons donc dire que les droites OM et OM_1 se correspondent par involution ; il y a, dans cette correspondance, deux rayons doubles, qui s'obtiennent en joignant O aux points doubles sur D. Deux rayons liés sont conjugués harmoniques par rapport aux rayons doubles. Une correspondance involutive entre deux droites est homographique et réciproque ; il s'ensuit qu'elle s'exprime par une relation homographique et réciproque, c'est-à-dire par une relation involutive, entre les coefficients angulaires de ces droites.

Exemples. — 1° Les côtés d'un angle droit de sommet fixe se correspondent dans une involution, dont les rayons doubles sont les droites isotropes.

2° Prenons une courbe du second ordre, un point O sur cette courbe, et un point I en dehors. Menons par I une sécante variable

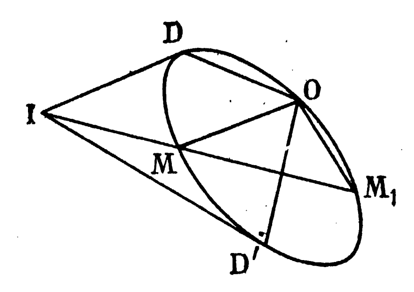
---

ment. On est conduit à constater l'exactitude des deux égalités suivantes :

$$(P, Q, Q_1, P) = (P_1, Q_1, Q, P_1) \qquad \text{et} \qquad (P_1, Q, Q_1, P) = (P, Q_1, Q, P_1),$$

ce qui n'offre pas de difficulté.

qui coupe la courbe en deux points M et M_1. Si nous choisissons OM, OM_1 en résulte d'une façon unique, et inversement. La relation entre les coefficients angulaires de ces droites est donc nécessairement homographique; comme elle est réciproque, elle est involutive (1).



Les rayons doubles joignent le point O aux points de contact des tangentes issues de I; ceci nous montre que d'un point I on peut mener deux tangentes à une courbe du second ordre. Quel que soit le point O, les rayons OM et OM_1 sont conjugués harmoniquement par rapport aux rayons doubles OD et OD'. En particulier, en faisant tendre le point O vers D, on obtient un faisceau harmonique, dont les rayons sont DI, DD', DM, DM_1. Donc le lieu des conjugués harmoniques du point I par rapport aux points de rencontre M et M_1 de la sécante variable IMM_1 n'est autre que la droite DD'. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, dont nous donnerons plus loin une démonstration purement analytique.

Le lieu des conjugués harmoniques d'un point par rapport aux extrémités des cordes d'une courbe du second ordre qui passent par ce point, est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de ce point. On l'appelle *polaire* du point (2).

Ces exemples témoignent de la fécondité des notions relatives à l'homographie et l'involution, dans la théorie des courbes du second ordre.

129. Un cas remarquable de correspondance involutive. Théorème de Desargues. — Nous allons établir une proposition importante par ses applications :

---

(1) La réciproque de ce théorème est vraie : *si deux droites* OM *et* OM_1 *issues d'un point* O *d'une courbe du second ordre se correspondent par involution, la droite* MM_1, *qui joint leurs deuxièmes points de rencontre avec cette courbe, passe par un point fixe.* En effet, soient OA, OA_1 et OB, OB_1 deux couples particuliers de rayons homologues, qui coupent la courbe en A, A_1, B, B_1. Soit I le point de rencontre de AA_1 et BB_1. Menons IM qui coupe la courbe en M''. D'après le théorème direct, OM et OM'' se correspondent par involution : cette involution a deux couples OA, OA_1 et OB, OB_1 communs avec l'involution donnée. Donc M'' coïncide avec M.

(2) Ce théorème s'applique aussi à une conique décomposée en deux droites; l'élève étudiera directement ce cas particulier, comme exercice. Nous lui conseillerons aussi, dès maintenant, de se reporter à la démonstration analytique (nº 169), dont la compréhension n'exige rien de plus que ses connaissances actuelles.

Si les coefficients d'une équation du second degré sont des fonctions linéaires d'un paramètre, ses racines sont liées involutivement.

Soit en effet l'équation

$$(a+\lambda a_1)x^2+(b+\lambda b_1)x+c+\lambda c_1=0,$$

dont les coefficients sont des fonctions linéaires du paramètre λ. Choisissons la valeur de l'une des racines : λ se trouve déterminé, donc l'autre racine en résulte d'une façon unique. Comme il y a réciprocité, les racines sont liées entre elles involutivement. Pour obtenir explicitement la relation entre x' et x'', il suffit d'ailleurs d'éliminer λ entre les équations

$$(a+\lambda a_1)(x'+x'')+b+\lambda b_1=0,$$
$$(a+\lambda a_1)x'x''-(c+\lambda c_1)=0,$$

ce qui donne

$$x'x''(ab_1-ba_1)+(x'+x'')(ac_1-ca_1)+bc_1-cb_1=0.$$

Cette proposition d'algèbre conduit en géométrie au théorème de Desargues. Considérons les courbes du second ordre, définies en coordonnées homogènes par l'équation

$$\text{(2)} \qquad F(X, Y, T)+\lambda G(X, Y, T)=0.$$

Ces courbes forment une famille à un paramètre, qu'on nomme *faisceau ponctuel,* dont nous étudierons plus tard les propriétés. *Les deux points déterminés par l'une d'elles sur une sécante,* et c'est là l'énoncé du théorème, *se correspondent involutivement.*

En effet, le long de cette sécante, nous pouvons exprimer X, Y, T en fonctions linéaires d'un paramètre μ :

$$X=X_1+\mu X_2, \qquad Y=Y_1+\mu Y_2, \qquad T=T_1+\mu T_2.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (2), nous aurons une équation du second degré en μ, dont les coefficients dépendent linéairement de λ. Entre les deux racines de cette équation il y a donc une relation involutive ; par suite, le long de la sécante Δ, les points M et M_1 déterminés par l'une de nos courbes se correspondent involutivement (en prenant sur Δ une origine A et un sens positif, la valeur de $\overline{AM}$ est une fonction homographique du μ de ce point ; or si deux nombres μ et μ_1 sont liés involuti-

vement, il en est de même des valeurs déduites de chacun d'eux par une même transformation homographique).

On obtiendra de même des divisions involutives en considérant les deux points de rencontre d'une droite fixe avec une des surfaces du second ordre

$$F(X, Y, Z, T) + \lambda G(X, Y, Z, T) = 0.$$

La démonstration est exactement la même que dans le cas précédent.

Nous donnerons plus tard de nombreuses applications du théorème de Desargues. Remarquons dès à présent que nous en avons un cas particulier dans cette proposition, déjà signalée :

Les cercles (ou les sphères) d'un faisceau déterminent sur une droite une involution.

Cherchons en effet l'équation d'un cercle du faisceau déterminé dans le plan xOy par les deux cercles

$$C = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$
$$C' = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Chaque cercle ayant pour équation

$$C + \lambda C' = 0 \tag{3}$$

est un cercle du faisceau. Inversement, montrons qu'on peut déterminer λ de manière que cette équation représente un cercle quelconque Γ du faisceau. Sur Γ, prenons en effet un point $M_0(x_0, y_0)$, autre que les deux points communs à C et C'. Soient C_0 et C'_0 les valeurs prises en M_0 par les premiers membres des équations de ces deux cercles. Le cercle

$$C'_0 C - C_0 C' = 0$$

est bien de la forme annoncée et passe en M_0. Il a trois points communs avec Γ ; par suite Γ est bien représenté par une équation de la forme (3).

La proposition précédente, obtenue déjà, se trouve ainsi rattachée à l'ordre d'idées actuel.

CHAPITRE VIII

CORRÉLATION. TANGENTES. ENVELOPPES.

I. — Corrélation dans le plan. Équation tangentielle d'une courbe algébrique.

130. Courbes corrélatives. — Nous emploierons des coordonnées homogènes. A la droite D d'équation

$$uX + vY + rT = 0$$

associons le point P de coordonnées homogènes u, v, r. On dit que le point P et la droite D sont *corrélatifs*.

Théorème. — *Si la droite* D *tourne autour d'un point, le point corrélatif* P *décrit la droite corrélative du point fixe.*

En effet, on peut traduire l'hypothèse en exprimant que u, v, r sont des fonctions linéaires d'un paramètre

$$u = u_1 + \lambda u_2, \qquad v = v_1 + \lambda v_2, \qquad r = r_1 + \lambda r_2\,;$$

le point P décrit dans ces conditions une droite Δ d'équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma T = 0,$$

les coefficients α, β, γ étant liés par les relations

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma r_1 = 0,$$
$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma r_2 = 0.$$

Or, le point autour duquel tourne D est le point d'intersection des deux droites

$$u_1 X + v_1 Y + r_1 T = 0,$$
$$u_2 X + v_2 Y + r_2 T = 0.$$

On peut lui attribuer comme coordonnées homogènes α, β, γ. C'est donc bien le corrélatif de Δ. (C. q. f. d.)

Le raisonnement montre en outre que le rapport anharmonique de quatre points alignés est égal à celui des quatre droites concourantes qui en sont les corrélatives.

Donnons maintenant la notion de courbes corrélatives. Soit une courbe C, une tangente variable D à cette courbe. Le lieu du point P, corrélatif de la droite D, est une courbe Γ. Nous allons établir qu'*il y a réciprocité entre* C *et* Γ, d'où le nom de courbes corrélatives.

En effet, soit ϖ le point de contact de C et de la tangente D. Soit D_1 la tangente à C en un point ϖ_1, infiniment voisin de ϖ, et P_1 le corrélatif de D_1. Le point de rencontre de D et D_1 est le corrélatif de la droite PP_1 ; il tend vers ϖ quand D_1 tend vers D. Donc la tangente en P à Γ, qui est la limite de PP_1, est la droite corrélative du point ϖ. (C. q. f. d.)

Analytiquement, on peut raisonner ainsi : soient x, y, t les coordonnées homogènes d'un point de C et

$$uX + vY + rT = 0$$

l'équation de la tangente en ce point. Le long de la courbe, x, y, t d'une part et u, v, r d'autre part sont des fonctions d'un certain paramètre λ, liées par les identités

$$ux + vy + rt = 0,$$
$$u\frac{dx}{d\lambda} + v\frac{dy}{d\lambda} + r\frac{dt}{d\lambda} = 0,$$

qui expriment que $\Lambda = \lambda$ est racine double de l'équation

$$u(\lambda)x(\Lambda) + v(\lambda)y(\Lambda) + r(\lambda)t(\Lambda) = 0,$$

qui donne les Λ des points d'intersection de la courbe avec sa tangente correspondant à la valeur particulière λ. Or ces deux identités entraînent la suivante :

$$x\frac{du}{d\lambda} + y\frac{dv}{d\lambda} + t\frac{dr}{d\lambda} = 0.$$

La réciprocité annoncée en résulte.

131. Équation tangentielle d'une courbe algébrique. — Soit une courbe algébrique

$$f(X, Y, T) = 0.$$

La condition pour qu'une droite

$$uX + vY + rT = 0$$

soit tangente à cette courbe s'obtient en écrivant que son équation peut être identifiée avec celle de la tangente en un point (x, y, t) de cette courbe. Or cette tangente est

$$Xf'_x + Yf'_y + Tf'_t = 0.$$

Tout revient donc à éliminer x, y, t entre les équations

$$ux + vy + rt = 0,$$
$$\frac{u}{f'_x} = \frac{v}{f'_y} = \frac{r}{f'_t},$$

qui sont linéaires et homogènes en u, v, r. On obtient ainsi une relation algébrique

$$\varphi(u, v, r) = 0,$$

homogène en u, v, r, qu'on nomme *équation tangentielle de la courbe.* Si, dans cette équation, l'on regarde u, v, r, non plus comme les coefficients d'une droite, mais comme les coordonnées homogènes d'un point, elle représente la courbe corrélative Γ de la courbe C ; chaque point de C est le corrélatif d'une tangente à la courbe Γ : avec précision, l'équation

$$xu + yv + tr = 0,$$

où u, v, r désignent les coordonnées homogènes d'un point et x, y, t certains coefficients, représente la tangente à la courbe Γ, moyennant la condition

$$f(x, y, t) = 0,$$

qui, par suite, n'est autre que l'équation tangentielle de la courbe Γ.

Ainsi, moyennant des notations convenables, *l'équation tangentielle d'une courbe est l'équation ponctuelle de sa corrélative et inversement* (par équation ponctuelle, nous entendons

l'équation ordinaire, le qualificatif marquant seulement l'opposition des deux points de vue).

A cause de la réciprocité établie précédemment, si l'on donne l'équation tangentielle,

$$\varphi(u, v, r) = 0,$$

de la courbe C, pour obtenir son équation ponctuelle, il suffira d'éliminer u, v, r entre les équations

$$xu + yv + tr = 0,$$
$$\frac{x}{\varphi'_u} = \frac{y}{\varphi'_v} = \frac{t}{\varphi'_r} \text{ [1]}.$$

Remarque. — Aux coefficients u, v, r de l'équation d'une tangente à la courbe C, on donne le nom de coordonnées tangentielles ; par opposition, les coordonnées homogènes x, y, t de son point de contact sont dénommées coordonnées ponctuelles.

132. Classe d'une courbe algébrique. — On nomme *classe* le degré de l'équation tangentielle.

Si une courbe est de première classe, cette courbe est un point ; en effet, l'équation tangentielle

$$au + bv + cr = 0$$

exprime que la droite

$$uX + vY + rT = 0$$

passe par le point (a, b, c).

Problème. — *Mener d'un point* $M_0(x_0, y_0, t_0)$ *les tangentes à une courbe algébrique.*

1° On donne l'équation tangentielle de la courbe. On est alors amené à résoudre le système de deux équations homogènes

$$\varphi(u, v, r) = 0,$$
$$ux_0 + vy_0 + rt_0 = 0,$$

(1) Par là, nous démontrons aussi qu'étant donnée une relation algébrique homogène entre u, v, r, il existe une courbe algébrique à laquelle la droite

$$uX + vY + rT = 0$$

reste tangente.

à trois inconnues u, v, r. Le nombre des solutions est égal au degré de φ, car si u, v, r étaient des coordonnées ponctuelles, x_0, y_0, t_0 désignant les coefficients d'une certaine droite, le système actuel correspondrait à la recherche des points de rencontre de cette droite et de la courbe $\varphi = 0$.

Ainsi la classe d'une courbe est encore le nombre de tangentes qu'on peut lui mener d'un point pris au hasard. Il en résulte que toute transformation homographique la laisse inaltérée.

2° On donne l'équation ponctuelle de la courbe

$$(C) \qquad f(x, y, t) = 0.$$

Un point de contact $M(x, y, t)$ satisfera à cette équation et à l'équation

$$(C_1) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + t_0 f'_t = 0$$

qui exprime que M_0 est sur la tangente en ce point (x, y, t).

Tout point de contact s'obtient donc en cherchant les points communs aux courbes C et C_1. Mais, inversement, chaque point commun à ces deux courbes ne fournit pas un point de contact ; le système formé par leurs équations répond en effet à un objet plus étendu que la seule recherche des tangentes issues de M_0 : il exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$f(x + \lambda x_0, y + \lambda y_0, t + \lambda t_0) = 0$$

admette la racine $\lambda = 0$ au moins à l'ordre deux, c'est-à-dire pour que la droite MM_0 ait, en M, au moins deux points communs avec la courbe C. Si le point M est simple, cela entraîne alors le contact de MM_0 avec la courbe. Mais si M est au moins d'ordre d'eux, toute droite issue de M possède, *ipso facto,* deux points confondus en M et communs avec C. Il n'y a pas en général contact : le contact ne se produit que si l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = 0$ surpasse l'ordre de M en tant que point de la courbe C. En résumé, on devra donc examiner chaque solution fournie par un point singulier de C : sauf des cas exceptionnels, elle ne convient pas au problème proposé.

133. Relation entre l'ordre et la classe. — Supposons que la courbe C ne possède pas de point singulier. Tout point commun à C et

C_1 est le point de contact d'une tangente issue de M_0. Le nombre de ces points est $m(m-1)$, d'où le théorème suivant :

Une courbe d'ordre m, sans point singulier, est de classe $m(m-1)$.

Par exemple, une courbe du second ordre est de seconde classe. La réciproque est vraie, d'après la théorie de la corrélation.

Si une courbe C, du second ordre, est indécomposée, il est impossible que son équation tangentielle se décompose : cette dernière circonstance exigerait que les tangentes à C passent par deux points fixes A et B, qui seraient des points d'ordre deux de C, conclusion contraire à l'hypothèse d'indécomposition.

Soit encore la courbe du troisième ordre

$$x^3+y^3=t^3\,;$$

elle n'a pas de point singulier, elle est donc de sixième classe.

Supposons maintenant que C présente des points singuliers. Ainsi que nous l'avons dit, chacun d'eux a pour effet d'abaisser la classe de plusieurs unités. En particulier, on peut établir le résultat suivant :

Un point d'ordre deux, à tangentes distinctes, abaisse la classe de deux unités.

Il suffit, pour le montrer, de faire voir qu'un tel point $M_1(x_1, y_1, t_1)$ constitue une solution, d'ordre deux, du système formé par les équations de C et de C_1. Or, toutes les dérivées secondes de f ne s'annulant pas en M_1, M_1 est un point simple de C_1 ; la tangente en ce point à cette courbe a pour équation

$$x_0(xf''_{x_1^2}+yf''_{x_1y_1}+tf''_{x_1t_1})+y_0(xf''_{x_1y_1}+yf''_{y_1^2}+tf''_{y_1t_1})$$
$$+t_0(xf''_{x_1t_1}+yf''_{y_1t_1}+tf''_{t_1^2})=0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(1) \qquad x_0\varphi'_x+y_0\varphi'_y+t_0\varphi'_t=0,$$

après avoir posé

$$2\varphi(x, y, t)=x^2f''_{x_1^2}+y^2f''_{y_1^2}+t^2f''_{t_1^2}+2ytf''_{y_1t_1}+2txf''_{t_1x_1}+2xyf''_{x_1y_1}.$$

Or l'équation

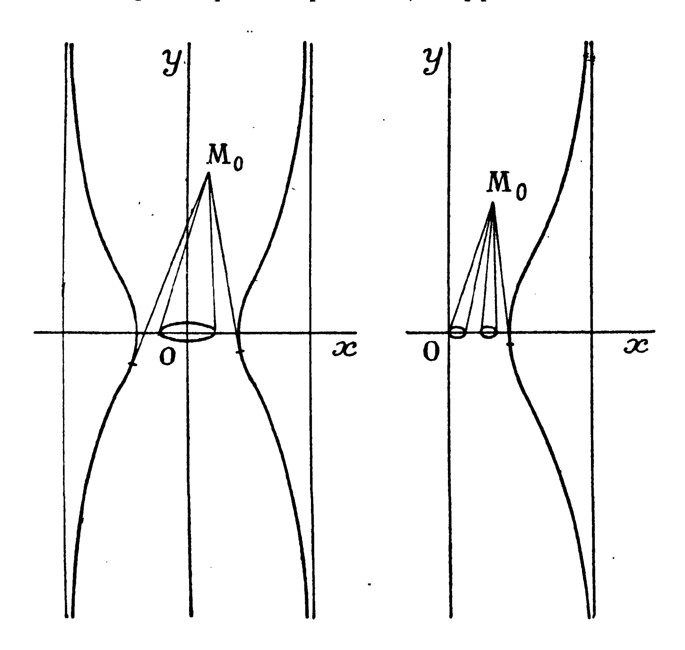
$$\varphi(x, y, t)=0$$

représente (nº 75) l'ensemble des tangentes en M_1 à C ; nous verrons plus loin [(nº 170), l'élève est dès maintenant à même de comprendre le raisonnement qui a trait à cet objet], que l'équation (1) est celle de la *polaire* de M_0 par rapport à l'ensemble de ces deux droites. Ainsi la tangente en M_1 à C_1 est conjuguée harmonique de M_1M_0 par rapport aux tangentes en M_1 à C, et par suite *elle est distincte de celles-ci* si M_0 n'est sur aucune d'elles. Le théorème est donc démontré.

Un point d'ordre deux à tangentes confondues fait perdre en général trois unités à la classe, mais il peut en faire perdre un nombre plus grand. Pour s'en rendre compte, l'élève cherchera combien l'origine fait perdre d'unités à la classe des courbes

$$x^2(x^2+y^2)=y^2 \qquad \text{et} \qquad x^3(x^2+y^2)=y^2.$$

Ce nombre est quatre pour la première, cinq pour la seconde. Pour



comprendre le mécanisme de ce déchet, l'élève fera bien de tracer, concurremment à chacune de ces courbes, l'une des suivantes :

$$y^2(1-x^2)=(x^2-\varepsilon^2)(x^2-4\varepsilon^2)$$

et $$y^2(1-x^3)=a(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)(x-3\varepsilon)(x-4\varepsilon),$$

dont elles sont les limites respectives; ces dernières n'ont pas de points singuliers; il est alors facile, sur la figure ci-dessus, en choisissant convenablement la position de M_0, de compter le nombre des tangentes issues de ce point et infiniment voisines de M_0O (1).

Mais les exemples précédents constituent des cas exceptionnels. En

(1) Il ne faut généraliser cette méthode qu'avec circonspection : les résultats tirés du seul examen d'une figure réelle sont toujours sujets à caution, l'oubli de deux solutions imaginaires conjuguées pouvant les fausser. Les exemples précédents sont simplement construits de manière à faire comprendre comment les choses se passent.

général, un point de rebroussement diminue la classe de trois unités; il en est toujours ainsi pour un point de rebroussement d'une courbe du troisième ordre, puisque sa classe, au plus égale à six, est au moins égale à trois.

En définitive, on peut résumer ainsi les résultats concernant la classe d'une courbe d'ordre trois :

1° Si elle n'a pas de point singulier, elle est de sixième classe;

2° Si elle possède un point d'ordre deux à tangentes distinctes, sa classe est quatre;

3° Enfin si elle présente un rebroussement, elle est de troisième classe.

134. Classe d'une courbe unicursale. — Si une courbe C est unicursale, il en est de même de sa corrélative, car si x, y, t sont des polynomes en λ,

$$x = \mathrm{P}(\lambda), \qquad y = \mathrm{Q}(\lambda), \qquad t = \mathrm{S}(\lambda),$$

on peut prendre

$$u = \mathrm{Q}(\lambda)\mathrm{S}'(\lambda) - \mathrm{S}(\lambda)\mathrm{Q}'(\lambda), \qquad v = \mathrm{S}(\lambda)\mathrm{P}'(\lambda) - \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{S}'(\lambda),$$
$$r = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{Q}'(\lambda) - \mathrm{P}'(\lambda)\mathrm{Q}(\lambda);$$

si P, Q, S sont de degré m, les u, v, r sont au plus de degré $2m - 2$. Donc

La classe d'une courbe unicursale d'ordre m est au plus $2m - 2$.

Par exemple, la classe d'une courbe unicursale d'ordre trois est au plus quatre. Cette classe est donc nécessairement quatre ou trois, d'où il suit que la courbe possède un point et un seul d'ordre deux. Ceci nous démontre le résultat suivant, déjà annoncé (n° 95):

Pour qu'une courbe du troisième ordre soit unicursale, il faut et il suffit qu'elle ait un point d'ordre deux.

La courbe

$$x^3 + y^3 = t^3$$

n'a pas de point singulier; elle n'est donc pas unicursale.

II. — Corrélation dans l'espace. — Représentation tangentielle des lignes et des surfaces.

135. Au plan P qui a pour équation

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

nous associerons le point M, de coordonnées homogènes u, v, w, r;

nous dirons que ce point et ce plan sont *corrélatifs*. En raisonnant comme en géométrie plane, on établit les résultats suivants :

1° Si le plan P tourne autour d'un point fixe A, son corrélatif M décrit le plan B corrélatif de A ;

2° Si le plan P tourne autour d'une droite fixe D, son corrélatif M décrit une deuxième droite ; ces deux droites sont réciproques et s'appellent corrélatives.

136. Application aux courbes. — Surfaces développables. — Supposons que le point M décrive une courbe C ; ses coordonnées homogènes x, y, z, t seront fonctions d'un certain paramètre λ. Si un plan R est tangent en M à la courbe C, ses coefficients u, v, w, r vérifient les deux relations identiques [1]

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{1}$$

$$u\frac{dx}{d\lambda} + v\frac{dy}{d\lambda} + w\frac{dz}{d\lambda} + r\frac{dt}{d\lambda} = 0. \tag{2}$$

Le lieu des corrélatifs ρ des différents plans R est une surface Σ ; celle-ci est réglée, car pour une valeur fixe de λ, les équations (1) et (2) définissent une droite θ_λ. Le plan tangent en un point ρ à la surface Σ contient la droite θ_λ, ainsi que la tangente à la courbe obtenue sur Σ, en faisant varier λ seul.

Or, les identités (1) et (2) entraînent

$$x\frac{\partial u}{\partial\lambda} + y\frac{\partial v}{\partial\lambda} + z\frac{\partial w}{\partial\lambda} + t\frac{\partial r}{\partial\lambda} = 0 ; \tag{2 bis}$$

les relations (1) et (2bis) expriment que la droite θ_λ et la tangente à la courbe obtenue sur Σ en faisant varier λ seul sont contenues dans le plan qui a pour coefficients x, y, z, t, c'est-à-dire dans le plan corrélatif du point M de la courbe C. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Le plan tangent à la surface Σ *est le même en chaque point d'une génératrice : c'est le plan corrrélatif du point* M *sur la courbe* C.

Tous les plans tangents à Σ forment, et c'est là un fait remarquable, une famille à un paramètre.

Pour faire apparaître un caractère de réciprocité entre la figure initiale et sa corrélative, considérons les plans osculateurs de C, qui forment une famille particulière de plans tangents. Appelons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

---

[1] Les coefficients u, v, w, r dépendent du paramètre λ et d'un deuxième paramètre qui résulte de l'indétermination du plan tangent, assujetti seulement à contenir la tangente à C en M.

les coefficients de l'un d'eux. Ils sont fonctions du seul paramètre λ, et liés à x, y, z, t par les identités

(3) $$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0,$$

(4) $$\alpha \frac{dx}{d\lambda} + \beta \frac{dy}{d\lambda} + \gamma \frac{dz}{d\lambda} + \delta \frac{dt}{d\lambda} = 0,$$

(5) $$\alpha \frac{d^2x}{d\lambda^2} + \beta \frac{d^2y}{d\lambda^2} + \gamma \frac{d^2z}{d\lambda^2} + \delta \frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0,$$

qui entraînent

(3 *bis*) $$x \frac{d\alpha}{d\lambda} + y \frac{d\beta}{d\lambda} + z \frac{d\gamma}{d\lambda} + t \frac{d\delta}{d\lambda} = 0,$$

(4 *bis*) $$\frac{dx}{d\lambda}\frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\beta}{d\lambda} + \frac{dz}{d\lambda}\frac{d\gamma}{d\lambda} + \frac{dt}{d\lambda}\cdot\frac{d\delta}{d\lambda} = 0,$$

(5 *bis*) $$x \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} + y \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} + z \frac{d^2\gamma}{d\lambda^2} + t \frac{d^2\delta}{d\lambda^2} = 0.$$

Les relations (3), (3bis), (5bis), forment un système qui se déduit de celui des relations (3), (4), (5) par l'échange de x et de α, de y et de β, de z et de γ, de t et de δ. En interprétant ce résultat, nous obtenons immédiatement l'énoncé suivant :

Le plan osculateur à la courbe C *au point* **M** *a pour corrélatif un point* μ *qui décrit, sur la surface* Σ, *une courbe* Γ ; *en* μ, *le plan osculateur à* Γ *a pour corrélatif le point* **M**.

Il y a donc réciprocité entre les courbes C et Γ. En comparant les deux énoncés précédents, nous voyons maintenant que, tout le long de la génératrice θ_λ, le plan tangent à Σ est justement le plan osculateur en μ à Γ.

Cherchons enfin la tangente en μ à la courbe Γ ; nous laisserons à l'élève le soin de vérifier qu'on peut la considérer comme la droite qui joint les points

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha}{d\lambda}, \frac{d\beta}{d\lambda}, \frac{d\gamma}{d\lambda}, \frac{d\delta}{d\lambda}.$$

Or les plans corrélatifs de ces points sont, dans la figure initiale,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0,$$

$$x \frac{d\alpha}{d\lambda} + y \frac{d\beta}{d\lambda} + z \frac{d\gamma}{d\lambda} + t \frac{d\delta}{d\lambda} = 0 ;$$

tous deux sont tangents à la courbe C, en vertu des identités (4) et (4bis), qui expriment que ces plans coupent la courbe en deux points confondus. Ainsi :

Au point μ, la tangente à Γ est la droite θ_λ, corrélative de la tangente MT.

La théorie précédente nous conduit à des conclusions extrêmement importantes :

1° *Si une surface est le lieu d'une tangente à une courbe gauche, en chaque point d'une génératrice elle admet le même plan tangent, qui n'est autre que le plan osculateur à la courbe gauche.*

En effet, considérons la surface S engendrée par les tangentes à une courbe C : appliquons à cette courbe la succession des raisonnements précédents. Nous en déduisons une courbe réciproque Γ ; d'après ce que nous avons vu, la surface S n'est autre que le lieu des points corrélatifs des plans tangents à Γ. Donc le plan tangent à S est le même tout le long d'une de ses génératrices et se confond avec le plan osculateur de C.

2° *Si les plans tangents à une surface dépendent d'un seul paramètre, cette surface est le lieu des tangentes à une courbe gauche.*

En effet, les points corrélatifs des plans tangents à la surface Σ dépendent aussi d'un seul paramètre. Donc ils engendrent une courbe C. D'après ce qui précède, les génératrices de la surface Σ sont les tangentes à la courbe Γ, réciproque de C.

On établit, en analyse, que ces surfaces sont les seules qu'il soit possible d'appliquer sur un plan, sans déchirure ni duplicature. Pour cette raison, on leur donne le nom de surfaces *développables*.

Remarque. — Toute surface développable est réglée, mais la réciproque n'est pas vraie ; pour une surface réglée quelconque, le plan tangent varie quand son point de contact décrit une génératrice : nous avons eu, au n° 121, un exemple de cette circonstance en étudiant les surfaces réglées du second ordre. Nous avons alors montré que si un point décrit une génératrice, *le plan tangent* en ce point *tourne* autour d'elle, *de manière que le rapport anharmonique de quatre de ses positions soit égal à celui des quatre points de contact correspondants*. Cette loi est générale. Il est aisé de la vérifier : considérons la surface définie, en coordonnées non homogènes, par les équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{6}$$

où a, b, p, q sont des fonctions d'un paramètre λ. Un point de la surface est déterminé si l'on connaît son λ et son z. Le plan tangent en ce point est défini par la génératrice et la tangente à la section horizontale, qui a pour paramètres directeurs

$$z\frac{da}{d\lambda} + \frac{dp}{d\lambda}, \qquad z\frac{db}{d\lambda} + \frac{dq}{d\lambda}, \qquad 0.$$

Donc, le plan tangent cherché a pour équation

$$X - aZ - p = \mu(Y - bZ - q),$$

en posant

$$\mu = \frac{z\dfrac{da}{d\lambda} + \dfrac{dp}{d\lambda}}{z\dfrac{db}{d\lambda} + \dfrac{dq}{d\lambda}}.$$

Cette relation met en évidence une correspondance homographique entre z et μ ; la propriété annoncée en résulte. Toutefois, si, pour certaines valeurs de λ, l'on a

$$\frac{da}{dp} = \frac{db}{dq},$$

le plan tangent sera le même en tout point de chacune des génératrices correspondantes. Enfin, si cette égalité a lieu quel que soit λ, les plans tangents à la surface réglée sont invariables le long de chaque génératrice : ils forment une famille à un paramètre, et *dans ce cas seulement* il existe sur la surface une courbe tangente à toutes les génératrices [1]. Nous proposons, comme exercice, de vérifier que cette courbe est bien définie en adjoignant aux deux équations (6) la suivante :

$$z = -\frac{dp}{da}.$$

137. Application de la corrélation aux surfaces non développables. — Faisons maintenant décrire à un point M une surface S non développable ; les plans tangents à cette surface dépendent de deux paramètres, et le lieu de leurs corrélatifs est une deuxième surface Σ ; montrons la réciprocité, c'est-à-dire établissons que les plans tangents à Σ ont pour corrélatifs les points de S. A cet effet, appelons λ et μ les paramètres qui déterminent la position d'un point de S ayant pour coordonnées homogènes x, y, z, t. Ces quatre nombres, ainsi que les quatre coefficients u, v, w, r du plan tangent à S au point considéré sont des fonctions de λ et de μ. Ce plan est déterminé par les tangentes aux deux courbes obtenues en faisant varier seulement λ ou bien μ. Nous avons donc les identités :

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

$$u\frac{\partial x}{\partial \lambda} + v\frac{\partial y}{\partial \lambda} + w\frac{\partial z}{\partial \lambda} + r\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 0,$$

$$u\frac{\partial x}{\partial \mu} + v\frac{\partial y}{\partial \mu} + w\frac{\partial z}{\partial \mu} + r\frac{\partial t}{\partial \mu} = 0;$$

(1) On montrera que c'est là un fait exceptionnel. Voir n° 148 *bis*.

elles entraînent les suivantes :

$$x\frac{\partial u}{\partial \lambda}+y\frac{\partial v}{\partial \lambda}+z\frac{\partial w}{\partial \lambda}+t\frac{\partial r}{\partial \lambda}=0,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial \mu}+y\frac{\partial v}{\partial \mu}+z\frac{\partial w}{\partial \mu}+t\frac{\partial r}{\partial \mu}=0;$$

la réciprocité annoncée en résulte immédiatement.

138. Équation tangentielle d'une surface algébrique. — Soit, dès lors, une surface algébrique *non développable,* d'équation

$$f(x, y, z, t)=0.$$

On obtient son équation tangentielle en éliminant x, y, z, t entre les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} ux+vy+wz+rt=0, \\ \dfrac{u}{f'_x}=\dfrac{v}{f'_y}=\dfrac{w}{f'_z}=\dfrac{r}{f'_t}, \end{cases}$$

qui sont homogènes en x, y, z, t. Soit

$$\varphi(u, v, w, r)=0$$

l'équation ainsi obtenue, qui n'est autre que l'équation ponctuelle de la surface corrélative. A cause de la réciprocité précédemment établie, si on donne cette équation tangentielle, on en déduit inversement l'équation ponctuelle, en éliminant u, v, w, r entre les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} ux+vy+wz+rt=0, \\ \dfrac{x}{\varphi'_u}=\dfrac{y}{\varphi'_v}=\dfrac{z}{\varphi'_w}=\dfrac{t}{\varphi'_r}. \end{cases}$$

La *classe* d'une surface algébrique non développable est le degré de son équation tangentielle. C'est aussi le nombre des plans tangents qu'on peut mener à la surface *par une droite.*

Remarque. — Si l'on part de l'équation ponctuelle d'une surface algébrique, sans avoir recherché si elle est ou non développable, on s'apercevra qu'elle l'est si l'élimination de x, y, z, t entre les équations du système (7) conduit à deux relations distinctes (puisque, dans ce cas, comme corrélative de la surface, on doit trouver une courbe). Ainsi :

Une développable a deux équations tangentielles.

Remarquons à ce propos que si la courbe corrélative de la développable n'est pas l'intersection complète de deux surfaces, on rencontrera, dans la représentation tangentielle de cette développable, des

difficultés du même ordre que celles qui se sont présentées pour les courbes gauches.

Si l'on part d'une équation tangentielle déterminée, l'élimination de u, v, w, r entre les équations (8) fournit ou bien une seule relation, et on est en présence d'une véritable surface ; ou bien deux relations : les plans dont les coefficients vérifient l'équation proposée sont alors tangents à une courbe.

Classe d'une surface développable. — Cette notion est corrélative de la notion d'ordre d'une courbe gauche ; c'est donc le nombre de plans tangents qu'on peut mener *d'un point* à la développable proposée.

Une surface développable de première classe se réduit à une droite ; une surface non développable de première classe, à un point. Quand l'une des équations tangentielles d'une développable est du premier degré, cette développable est un cône.

139. Théorème. — *Si une surface du second ordre est développable, elle se réduit à un cône.*

En effet, un plan tangent à toute surface du second ordre la coupe suivant une courbe du second ordre, qui admet le point de contact comme point d'ordre deux (n° 77) ; c'est-à-dire suivant un système de deux droites issues de ce point. Supposons qu'*un plan tangent particulier* soit en contact avec la surface tout le long d'une génératrice G ; chaque point de cette droite est d'ordre deux dans l'intersection du plan et de la surface, qui est donc cette droite comptée deux fois. Par G, menons un autre plan ; il coupe la surface suivant une deuxième droite, et, comme il n'est pas tangent, c'est que le point commun à G et à cette deuxième droite est un point d'ordre deux de la surface. Celle-ci est donc un cône. (C. q. f. d.)

La conclusion de la proposition actuelle n'exige en réalité qu'une hypothèse moins restrictive que celle de l'énoncé ; il n'est pas besoin de supposer que le plan tangent est invariable le long de chaque génératrice ; il suffit que cette propriété s'applique à une seule génératrice.

Théorème. — *Toute surface non développable du second ordre est de seconde classe.*

En effet, chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux droites distinctes. Soit alors à mener des plans tangents par une droite D, rencontrant la surface en A et B. Un plan tangent issu de D coupe la surface suivant deux génératrices passant, l'une par A, l'autre par B. Or, par A il passe deux génératrices G_1 et G_2, déterminées par le plan tangent en ce point. Les plans D, G_1 et D, G_2 coupent la surface suivant G_1, G_2 et les deux génératrices de B. Ce sont les plans cherchés, et ils sont bien au nombre de deux.

La théorie de la corrélation nous permet maintenant d'énoncer le théorème suivant :

Toute surface de deuxième classe est du second ordre, ou exceptionnellement se réduit à une conique.

III. — Enveloppes.

140. Nous ne développerons la théorie qu'en géométrie plane. Nous avons vu qu'une droite

$$ux + vy + rt = 0,$$

dont les coefficients sont liés par une relation homogène

$$\varphi(u, v, r) = 0$$

ou, ce qui revient au même, sont des fonctions d'un paramètre λ, reste tangente à une certaine courbe.

Généralisons maintenant le problème et considérons une famille de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ, et définies en coordonnées non homogènes par l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Demandons-nous s'il existe une courbe E, tangente aux courbes C_λ ; si la réponse est affirmative, nous donnerons à cette courbe E le nom d'*enveloppe* des courbes C_λ.

Théorème. — *S'il existe une enveloppe* E, *au voisinage de laquelle les dérivées partielles f'_x et f'_y demeurent finies et*

continues[1], *cette enveloppe appartient au lieu* L *des points de rencontre des deux courbes*

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad et \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Plaçons-nous au point de vue de la géométrie réelle, et supposons qu'il existe une enveloppe E. Les coordonnées d'un point de contact de E et de C_λ seront certaines fonctions de λ,

$$x = A(\lambda), \qquad y = B(\lambda),$$

qui fourniraient, si on pouvait les calculer, une représentation paramétrique de E. Or ces fonctions vérifient nécessairement l'identité

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Pour achever de les déterminer, il faut une seconde relation : exprimons la coïncidence des tangentes à E et à C_λ. La normale à C_λ a pour paramètres directeurs f'_x et f'_y et la tangente à E a pour paramètres $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$. On doit avoir

$$f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} = 0.$$

Or puisque la fonction composée $f(x, y, \lambda)$ de la variable λ est identiquement nulle, il en est de même de sa dérivée, et l'on a

$$f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} + f'_\lambda = 0.$$

En comparant les deux dernières relations, on voit que les deux fonctions x et y de λ doivent satisfaire à la relation

$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Remarque. — Nous avons spécifié, dans l'énoncé, que f'_x et f'_y devaient rester finies au voisinage de E. Si l'on renonce à cette hypothèse, le théorème cesse d'être vrai. Si le long d'une ligne, l'une des dérivées f'_x ou f'_y devient infinie, il peut se faire que cette ligne soit tangente aux courbes C_λ sans que f'_λ soit nulle ; en voici des exemples : si l'on prend

$$f(x, y, \lambda) = \lambda - x + \sqrt{R^2 - y^2},$$

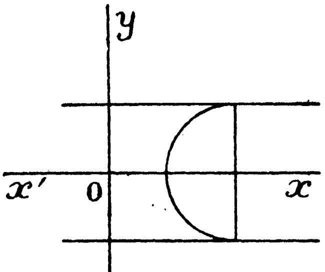
on a

$$f'_\lambda = 1.$$

---

(1) On suppose qu'il en soit ainsi pour tous les points (x, y) avoisinant l'arc E considéré et pour toutes les valeurs de λ mises en jeu le long de cet arc.

Les droites $y = \pm R$ n'en constituent pas moins une enveloppe des courbes C_λ, qui sont des demi-cercles.



On a un exemple analogue en prenant

$$f(x, y, \lambda) = \lambda - x + \sqrt[3]{y} = 0,$$

ce qui donne encore $f'_\lambda = 1$. Ces courbes sont tangentes à l'axe Ox, sur lequel f'_y est infinie.

Théorème. — *Toute courbe définie par le système*

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

est soit une enveloppe de courbes C_λ, *soit un lieu de points singuliers des lignes* C_λ, soit, exceptionnellement, une courbe C_λ particulière.

En effet, supposons que les fonctions

(1) $$x = A(\lambda), \qquad y = B(\lambda)$$

satisfassent aux deux relations du système précédent. En dérivant la première par rapport à λ et tenant compte de la seconde, nous voyons que l'on a

(2) $$f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} = 0,$$

relation qui exprime la coïncidence des tangentes à la courbe C_λ et à la courbe L définie paramétriquement par les relations (1), pourvu que f'_x et f'_y ne soient pas tous les deux nuls. Dans ce cas, la courbe L est une enveloppe des courbes C_λ. Par contre, si, en chaque point de L, f'_x et f'_y s'annulent, de la relation (2) on ne peut plus déduire le contact de L et de C_λ : L est un lieu de points singuliers des courbes C_λ.

Enfin si f'_λ contient en facteur une fonction de λ seul, les courbes particulières C_λ correspondant aux zéros de cette fonction constituent des solutions étrangères au problème de la recherche de l'enveloppe.

Remarques. — 1° Il peut se faire qu'en des points isolés de L, on ait à la fois

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0;$$

alors, pour la valeur correspondante de λ, C_λ a un point singulier sur L, et, pour cette courbe particulière, le contact cesse en général

avec la courbe L. La famille d'hyperboles

$$(x-y)(x+y-2\lambda)+\lambda^2=0$$

fournit un exemple de cette circonstance : toutes ces courbes sont tangentes à Ox, sauf pour la valeur $\lambda=0$, pour laquelle la courbe présente un point double.

2° La relation (2) est satisfaite lorsque $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ sont simultanément nuls : s'ils le sont identiquement, cela exprime que les courbes C_λ passent par un point fixe. On voit d'ailleurs que les coordonnées de ce point vérifieront $f'_y=0$. Si $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ s'annulent pour une valeur exceptionnelle de λ, on obtient un point de rebroussement pour la ligne L : il en est du moins ainsi lorsqu'une au moins des dérivées $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$ et $\frac{d^2y}{d\lambda^2}$ n'est pas nulle, et alors les valeurs de celles-ci forment un système de paramètres directeurs de la tangente à L au point considéré. Cette tangente coïncide encore avec celle de la courbe C_λ correspondante en ce point, pourvu qu'il soit simple pour cette dernière courbe. En effet, l'identité (2) donne, par dérivation,

$$f'_x\frac{d^2x}{d\lambda^2}+f'_y\frac{d^2y}{d\lambda^2}+f''_{x^2}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2+2f''_{xy}\frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}+f''_{y^2}\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2=0.$$

Pour notre valeur particulière de λ, cette identité fournit la relation

$$f'_x\frac{d^2x}{d\lambda^2}+f'_y\frac{d^2y}{d\lambda^2}=0,$$

qui exprime le contact. Cette méthode s'étend d'ailleurs au cas où, pour une valeur de λ, x et y ont un plus grand nombre de dérivées nulles.

141. Notion de point limite. — Le système

$$f(x, y, \lambda)=0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda)=0,$$

qui intervient dans la recherche de l'enveloppe, est la limite, pour $h=0$, du système

$$f(x, y, \lambda)=0, \qquad \frac{f(x, y, \lambda+h)-f(x, y, \lambda)}{h}=0,$$

équivalent au suivant :

$$f(x, y, \lambda)=0, \qquad f(x, y, \lambda+h)=0.$$

Donc le lieu L est aussi la limite du lieu des points d'intersection

de deux courbes C_λ et $C_{\lambda+h}$, dont les paramètres diffèrent d'une valeur constante h lorsque h tend vers zéro. Ces points d'intersection tendent vers des points appelés *points limites* ou points caractéristiques. Le lieu de ces points est l'enveloppe, pourvu que chacun d'eux soit simple sur la courbe C_λ.

142. Relation du problème des enveloppes avec celui des contours apparents. — Soit la famille de courbes

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Le plan xOy étant supposé horizontal, ces courbes sont des sections horizontales de la surface

$$\text{(S)} \qquad f(x, y, z) = 0.$$

La condition

$$f'_z(x, y, z) = 0$$

exprime que le plan tangent au point (x, y, z) est vertical, pourvu que ce point ne soit pas un point singulier de la surface S. La recherche de l'enveloppe des courbes C_λ équivaut donc à celle du contour apparent horizontal, en projection, de la surface S. Ce fait est d'ailleurs évident géométriquement : les sections horizontales de S se projettent horizontalement suivant des courbes tangentes au contour apparent ; c'est là un fait bien connu, dont nous laissons au lecteur le soin de retrouver la démonstration.

La remarque précédente va nous donner l'explication d'un certain nombre de faits, déjà rencontrés, et, en même temps, nous permettre d'étudier la disposition des courbes C_λ au voisinage de l'enveloppe.

Considérons un arc Γ de la courbe définie par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z(x, y, z) = 0.$$

Supposons que tous les points de S situés sur cet arc soient des points simples, c'est dire qu'en aucun point de Γ, f'_x et f'_y ne s'annulent simultanément. On peut alors disposer des axes, de manière que le long de cet arc (ou d'une portion plus restreinte) f'_y ne soit pas nulle. Supposons en outre que, le long de Γ, la dérivée f''_{z^2} ne s'annule pas non plus. A cause de la continuité, f'_y et f''_{z^2} auront un signe constant

sur Γ et dans son voisinage. On en déduit que chaque section de la surface S, par un plan $x = x_0$ (x_0 désigne l'abscisse d'un point de Γ), présente au voisinage de Γ une concavité de sens déterminé; en effet $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ est donné par

$$f'_y \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + f''_{y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 2f''_{yz}\frac{\partial y}{\partial z} + f''_{z^2} = 0,$$

or $\frac{\partial y}{\partial z}$ est, dans les conditions actuelles, un infiniment petit, donc $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ a un signe constant. Supposons donc, pour fixer les idées, que toutes nos sections parallèles à xOz tournent, au voisinage de Γ, leur concavité vers les y positifs, comme l'indique la figure. La projection E de l'arc Γ partage la partie avoisinante du plan xOy en deux régions : un point de la région (I) (du côté des y positifs), voisin de E, est la projection des deux points situés sur la portion de S avoisinant Γ. Par ce point, il passe donc deux courbes C_λ ; ces courbes sont tangentes à E ; les deux points de contact tendent vers le premier, lorsque celui-ci tend vers un point de E. Par contre, une verticale issue de la région (II) ne rencontre pas la surface S. De l'autre côté de l'arc E, il n'y a pas de courbes C_λ. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Soit un arc satisfaisant aux équations

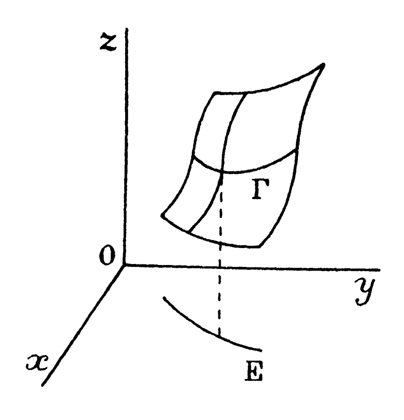
$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

ne contenant aucun point singulier des courbes C_λ, et tel que, le long de cet arc, f''_{λ^2} ne s'annule pas. Il divise la portion avoisinante du plan en deux régions : en un point infiniment voisin de l'arc, situé dans l'une des régions, il passe deux courbes C_λ, qui touchent cet arc en des points infiniment voisins du premier. Par un point de l'autre région, il ne passe, dans les mêmes conditions, aucune courbe C_λ.

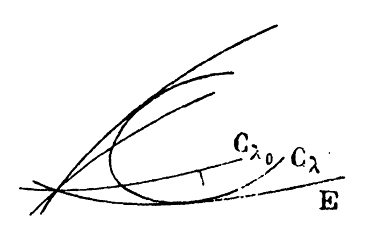
On voit comment la notion de point limite se trouve précisée par ce théorème : dans les conditions de l'énoncé, deux courbes C_λ et $C_{\lambda+h}$, infiniment voisines, ont bien un point d'intersection infiniment voisin de l'enveloppe.

Examinons maintenant le cas où, f'_y restant d'un signe déterminé

(sans s'annuler) sur l'arc Γ et dans la région avoisinante, la dérivée f''_{z^2} s'annulerait sur Γ ; en général, elle change alors de signe en traversant cet arc. Chaque section de S par un plan $x = x_0$ présente alors, sur Γ, un point d'inflexion à tangente verticale, en sorte qu'un point du plan xOy, voisin de E, est, quelle que soit la région qu'il occupe, la projection d'un seul point de la région de S qui avoisine Γ. Dans ce cas, les portions des courbes C_λ, voisines de E, traversent cet arc : il n'y a plus ici de point limite réel. Par contre, si f''_{z^2} s'annule le long de Γ (ou f''_{λ^2} le long de E), sans changer de signe, la disposition des courbes C_λ au voisinage de l'enveloppe est la même que dans le cas ordinaire ($f''_{\lambda^2} \neq 0$) étudié précédemment.



Il nous reste à examiner ce qui résulte de la présence sur la surface S d'un point singulier ou d'une ligne singulière. Bornons-nous à étudier le cas où, en ce point, ou sur cette ligne (et dans le voisinage), f''_{z^2} n'est pas nulle. S'il y a un point singulier admettant un cône des tangentes du second ordre à contour apparent réel (¹), les sections horizontales de S voisines de ce point se projettent suivant des courbes qui sont bitangentes aux deux branches réelles de courbe constituant le contour apparent, en projection, de S dans le voisinage du point conique. La section particulière C_{λ_0} dont le plan passe par le point conique offre un point double en ce point : sa projection n'a en général aucun contact avec E. Ainsi, nous retrouvons le résultat déjà obtenu, dans le cas où une courbe particulière C_{λ_0} admet un point double : le contact cesse alors pour la valeur λ_0. Dans les conditions précédentes, l'enveloppe a elle-même un point double, et chaque courbe C_λ voisine de C_{λ_0} la touche en deux points voisins du point double, un sur chaque branche.



(¹) Un point singulier de la surface dont le cône des tangentes est imaginaire, ou réel avec un contour apparent imaginaire, donne ou des courbes C_λ imaginaires, ou des courbes C_λ entourant la projection du point conique ; dans un cas comme dans l'autre, cela ne donne aucun résultat au point de vue enveloppe réelle.

Enfin, si S présente une ligne double, celle-ci constitue un lieu de points doubles des sections horizontales de la surface. Nous avons vu (page 150) que si les relations $f'_x = f'_y = 0$ sont vérifiées le long d'une ligne de la surface, elles entraînent $f'_z = 0$ en chaque point de cette ligne. Donc s'il y a un lieu de points singuliers des courbes C_λ, ce lieu est la projection d'une ligne singulière de S, et on a, en chaque point de cette courbe, $f'_\lambda = 0$. Les lieux de points singuliers satisfont donc bien au système auquel on est conduit pour rechercher l'enveloppe.

En définitive, en rattachant le problème des enveloppes à la détermination d'un contour apparent, nous retrouvons les résultats qu'une étude directe avait mis en évidence.

143. Cas de données algébriques. — Étudions le cas où $f(x, y, \lambda)$ est un polynome en λ. Les conditions simultanées

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

expriment qu'au point (x, y) il passe deux courbes C_λ confondues, puisque l'équation donnant les λ de ces courbes doit admettre une racine double. L'élimination de λ fournit une équation

$$\Delta(x, y) = 0,$$

dont le premier membre est le discriminant du polynome en λ, $f(x, y, \lambda)$.

Exemples. — Soit

$$f(x, y, \lambda) = A(x, y)\lambda^2 + B(x, y)\lambda + C = 0.$$

L'enveloppe est

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Soit encore

$$f(x, y, \lambda) = \lambda^3 + P(x, y)\lambda + Q(x, y) = 0.$$

L'enveloppe est

$$4P^3 + 27Q^2 = 0.$$

Soit encore la famille de courbes

$$A(x, y)\cos\mu + B(x, y)\sin\mu = C(x, y),$$

dont l'équation rentre dans le type considéré par le changement de variable

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\mu}{2}.$$

L'enveloppe des courbes de cette famille est

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) = C^2(x, y), \text{ etc.}$$

Supposons maintenant que $f(x, y, \lambda)$ soit un polynome, non seulement par rapport à la variable λ, mais encore par rapport à x et y. Les courbes C_λ sont donc maintenant algébriques, et pour énoncer les résultats en toute généralité, nous considérerons toutes les valeurs réelles ou imaginaires des variables du problème.

144. Supposons qu'on cherche *l'enveloppe d'une courbe d'ordre n sans point multiple*; la courbe infiniment voisine la rencontre en n^2 points; il y a donc n^2 points limites, par suite, n^2 points de contact avec l'enveloppe. Parmi ces points, il peut s'en trouver un certain nombre qui restent fixes, soit p ce nombre: les courbes C_λ passent alors par ces points et demeurent tangentes à une courbe E, avec laquelle elles ont $n^2 - p$ points de contact.

Il peut arriver que deux points limites soient constamment confondus, ce qui revient à dire que pour chaque valeur de λ le système

$$(1) \qquad f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

admet une solution x, y d'ordre deux; les nombres x, y, coordonnées du double point limite sont des fonctions de λ qui vérifient identiquement les deux relations précédentes, et, par suite, leurs conséquences:

$$(2) \qquad f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} = 0, \qquad f''_{\lambda x} \frac{dx}{d\lambda} + f''_{\lambda y} \frac{dy}{d\lambda} + f''_{\lambda^2} = 0;$$

le fait que x, y est solution double du système $f = f'_\lambda = 0$ peut provenir, ou bien de ce qu'il est, quel que soit λ, d'ordre deux pour la seconde de ces courbes ($f''_{\lambda x} = f''_{\lambda y} = 0$), ou bien de ce que pour chaque valeur de λ il y a contact des courbes C_λ et $f'_\lambda = 0$, ce qui exige

$$f''_{\lambda x} f'_y - f''_{\lambda y} f'_x = 0,$$

ou, en utilisant la première des relations (2),

$$f''_{\lambda x} \frac{dx}{d\lambda} + f''_{\lambda y} \frac{dy}{d\lambda} = 0.$$

Donc, dans un cas comme dans l'autre, les fonctions x et y de λ doivent satisfaire identiquement à la relation

$$f''_{\lambda^2}(x, y, \lambda) = 0.$$

Supposons qu'il en soit ainsi; montrons que chaque courbe C_λ est

osculatrice à l'enveloppe (n° 84). En effet, $\frac{dy}{dx}$ a une valeur unique au point de contact (x, y) de C_λ et E, montrons que la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est aussi la même pour les deux courbes.

Pour cela, envisageons les relations (1) comme déterminant les deux fonctions inconnues y et λ de la variable x. Pour calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$, le long de l'enveloppe, dérivons par rapport à x les identités (1), la première, deux fois en tenant compte de la seconde, et la seconde, une seule fois, en ayant égard à

$$f''_{\lambda^2} = 0.$$

Il nous vient

$$\left\{\begin{aligned} & f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} = 0, \\ & f''_{x^2} + 2f''_{xy}\frac{dy}{dx} + f''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f'_y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx}\left(f''_{\lambda x} + f''_{\lambda y}\frac{dy}{dx}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

et

$$f''_{\lambda x} + f''_{\lambda y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

En vertu de cette dernière relation, nous obtenons

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy}\frac{dy}{dx} + f''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f'_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

c'est-à-dire la relation même qu'on eût trouvé en regardant, dans la première des équations (1), λ comme une constante : $\frac{d^2y}{dx^2}$ est bien le même pour E et C_λ.

Plus généralement, si les relations

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

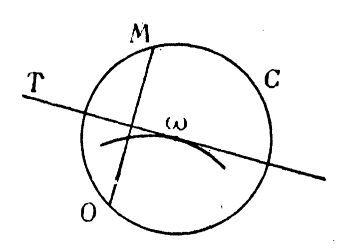
entraînent les suivantes :

$$f''_{\lambda^2}(x, y, \lambda) = \cdots = f^{(q-1)}_{\lambda^{q-1}}(x, y, \lambda) = 0, \qquad \text{avec} \quad f^{(q)}_{\lambda^q} \neq 0,$$

q points limites seront confondus et les courbes C_λ auront avec leur enveloppe un contact d'ordre q.

Application : cas d'une famille de cercles. — Prenons par exemple le cas d'un cercle : c'est une courbe du second ordre passant par les points cycliques. Donc ici, le nombre p des points fixes de la courbe est au moins égal à deux. S'il y a un troisième point fixe O, à distance finie, le cercle de centre ω touche son enveloppe en un seul point M,

symétrique de O par rapport à la tangente en ω au lieu de ce point, car le point de rencontre de deux de nos cercles infiniment voisins C et C_1 est symétrique de O par rapport à la droite $\omega\omega_1$ qui tend vers la tangente ωT au lieu des centres. Si p est égal à deux, C touche son enveloppe en deux points, qui, pour la même raison que précédemment, sont symétriques par rapport à la tangente au lieu des centres. Bien entendu, ces points peuvent être réels ou imaginaires. Montrer, comme exercice, que si tous les cercles C_λ de la famille étudiée sont orthogonaux à un cercle fixe Γ, de centre O, sur chacun de ces cercles, les points limites se correspondent dans une inversion dont le cercle fondamental est Γ.



Examinons le cas où les deux points limites viennent à se confondre : ils sont alors situés sur la tangente au lieu des centres, qui est par suite normale à l'enveloppe. On en déduit le théorème suivant :

Pour qu'un cercle soit osculateur à une courbe, il faut et il suffit que son centre décrive l'enveloppe des normales ou développée de cette courbe.

(Ce résultat ne suppose même pas que la courbe soit algébrique.)

145. Enveloppe de courbes présentant des points multiples. — Si les courbes C_λ présentent des points multiples, la relation

$$\Delta(x, y) = 0,$$

obtenue en annulant le discriminant, donne aussi le lieu de ces points multiples. Dans ce cas, le polynome $\Delta(x, y)$ se décompose en un produit ; on peut même établir que le facteur irréductible qui, annulé, correspond au lieu de l'un des points multiples, entre dans Δ avec une puissance égale, en général, au nombre d'unités que ce point fait perdre à la classe de la courbe. Cet énoncé se vérifie aisément pour la famille des courbes

$$f(x, y+\lambda) = 0,$$

déduites de l'une d'elles par une translation parallèle à Oy.

146. Enveloppe d'une famille de courbes définies paramétriquement. — Soient les courbes C_λ, représentées paramétriquement par les relations

$$x = f(t, \lambda), \qquad y = g(t, \lambda).$$

La valeur t du paramètre correspondant à un point de contact de C_λ avec l'enveloppe (si celle-ci existe) est une fonction de λ ; si cette

fonction est connue, les relations précédentes, dont les seconds membres deviennent des fonctions composées de λ, fournissent la représentation paramétrique de l'enveloppe. Or en exprimant la coïncidence des tangentes, on obtient la relation

$$g'_t f'_\lambda - f'_t g'_\lambda = 0,$$

qui définit la fonction cherchée. A vrai dire, on obtient ainsi, non seulement l'enveloppe, mais encore le lieu des points des courbes C_λ où f'_t et g'_t s'annulent simultanément quel que soit λ.

147. Enveloppe de courbes dépendant de deux paramètres liés par une relation. — Soient les courbes

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$

les paramètres λ et μ étant liés par la relation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Cette relation définit μ en fonction implicite de λ, ce qui permet de considérer f comme une fonction composée de λ. Donc l'enveloppe et le lieu des points multiples de nos courbes seront fournis par le système

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$
$$f'_\lambda + f'_\mu \frac{d\mu}{d\lambda} = 0;$$

or nous avons

$$\varphi_\lambda + \varphi'_\mu \frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe et le lieu des points multiples, nous serons, en définitive, amenés à éliminer λ et μ entre les trois relations

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$
$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$
$$f'_\lambda \varphi'_\mu - f'_\mu \varphi'_\lambda = 0.$$

De ce cas, on passe facilement à celui où l'on cherche l'enveloppe des courbes

$$F(x, y, u, v, r) = 0,$$

où u, v, r sont trois paramètres entrant dans F d'une manière homogène et liés par une relation homogène. Il suffit de poser

$$\frac{u}{r} = \lambda, \qquad \frac{v}{r} = \mu.$$

L'élève étudiera ce problème et retrouvera, par ce procédé, le moyen de passer de l'équation tangentielle d'une courbe à son équation ponctuelle.

148. Enveloppe d'une famille de surfaces. — Nous ne pouvons étudier ici cette question en détail : nous nous bornerons à quelques indications.

Il y a lieu d'examiner deux problèmes différents, suivant que les surfaces données dépendent de un ou de deux paramètres.

Soit d'abord une famille de surfaces S_λ à un paramètre, définies par

$$f(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Le système obtenu en adjoignant à cette équation la suivante

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$$

fournit l'enveloppe et le lieu des points singuliers des surfaces S_λ. Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait pas de points singuliers sur S_λ. Les deux équations précédentes représentent une courbe variable Γ_λ, qui engendre l'enveloppe E. Chaque surface S_λ est tangente à E tout le long de la courbe Γ_λ, qu'on nomme courbe caractéristique.

Soit maintenant une famille de surfaces à deux paramètres

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0\,;$$

chacune de ces surfaces touche son enveloppe par un (ou plusieurs) points, qu'on obtient en adjoignant à l'équation de la surface les deux suivantes :

$$f'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad f'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0.$$

On obtient l'équation de l'enveloppe et le lieu des points singuliers des surfaces S en éliminant λ et μ entre ces trois équations.

Nous demandons au lecteur d'admettre ces divers résultats.

148 bis. Familles de courbes de l'espace. — Ainsi que nous l'avons noté à la fin du n° 136, une famille à un paramètre de droites

$$x = a(\lambda)z + p(\lambda), \qquad y = b(\lambda)z + q(\lambda),$$

n'a pas en général d'enveloppe. Il en est de même pour une famille à un paramètre de courbes de l'espace ; notamment, s'il existait une enveloppe des courbes $f(x, z, \lambda) = g(y, z, \lambda) = 0$, elle se projetterait sur $x0z$ suivant l'enveloppe des $f = 0$, sur $y0z$ suivant l'enveloppe des $g = 0$; or, sur ces deux enveloppes, les deux points de contact provenant d'une même valeur de λ n'ont pas en général le même z : ils ne sont donc pas les projections d'un point de l'espace sur $x0z$ et $y0z$.

CHAPITRE IX

LONGUEUR D'UN ARC. — COURBURE

149. Longueur d'un arc. — Considérons une courbe rapportée à trois axes rectangulaires et définie par une représentation paramétrique

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = l(t).$$

Soit M_0M l'arc qui correspond à l'intervalle de variation t_0, t du paramètre. On démontre que le périmètre de toute ligne brisée d'extrémités M et M_0, ayant ses sommets consécutifs disposés sur l'arc M_0M (en suivant toujours le sens M_0M), a une limite quand le nombre des sommets augmente indéfiniment de manière que chaque côté de la ligne brisée tende vers zéro. Cette limite s'appelle la *longueur* de l'arc M_0M.

Nous admettrons que *l'arc est un infiniment petit équivalent à sa corde*(1).

Cela posé, la longueur s de l'arc M_0M est une fonction du paramètre t de son extrémité M. Supposons qu'on ait fait choix, sur la courbe, d'un sens positif de parcours. La quantité s représentera, avec plus de précision, l'*abscisse curviligne* de M, l'origine étant M_0. Cherchons $\frac{ds}{dt}$. Supposons que, t variant dans un sens déterminé, M se déplace toujours dans le même sens. Si le sens de variation de s et celui de t coïncident, $\frac{ds}{dt}$ sera positif; s'ils

(1) Il peut y avoir exception : tel est le cas où la courbe est une spirale logarithmique, M_0 se trouvant au point asymptote.

s'opposent, $\frac{ds}{dt}$ sera négatif. Cherchons sa valeur absolue. Donnons à t un accroissement Δt. Nous pouvons écrire

$$\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\text{dist}^{\text{ce}}\text{ curv. MM}'}{|\Delta t|} = \frac{\text{dist}^{\text{ce}}\text{ curv. MM}'}{\text{dist}^{\text{ce}}\text{ rectil. MM}'} \cdot \frac{\text{dist}^{\text{ce}}\text{ rectil. MM}'}{|\Delta t|}.$$

D'après une proposition précédemment admise, le premier facteur tend vers 1. Donc la limite cherchée est celle de

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Nous avons donc

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

L'abscisse curviligne de M à partir de M_0 est donc donnée en définitive par la formule

$$\overset{\smile}{M_0M} = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + l'^2(t)}\,.\,dt.$$

Exemple. — *Calculer la longueur d'un arc de la cycloïde*

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Considérons un arc qui a pour origine le point O, et prenons pour sens des arcs croissants le sens des t croissants. L'application de la formule précédente (avec $z = 0$) nous donne

$$\frac{ds}{dt} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Il est important, lorsque l'extrémité de l'arc est située sur une arche quelconque de la courbe, de ne pas oublier le symbole : valeur absolue.

Des précautions de cette nature s'imposent d'ailleurs chaque fois que sur l'arc calculé sont situés des points de rebroussement. En effet, supposons qu'une valeur t_1 du paramètre fournisse un tel point ; en reprenant la courbe

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = l(t),$$

les développements des seconds membres au voisinage de ce point sont de la forme

$$f(t) = f(t_1) + a_p(t - t_1)^p + a_{p+1}(t - t_1)^{p+1} + \cdots,$$
$$g(t) = g(t_1) + b_p(t - t_1)^p + b_{p+1}(t - t_1)^{p+1} + \cdots,$$
$$l(t) = l(t_1) + c_p(t - t_1)^p + c_{p+1}(t - t_1)^{p+1} + \cdots,$$

p étant un entier pair, et les trois nombres a_p, b_p, c_p n'étant pas tous nuls. Dès lors, en posant $p = 2h$, la quantité

$$f'^2(t) + g'^2(t) + l'^2(t)$$

contient en facteur $(t - t_1)^{4h-2}$. Par suite, nous avons

$$\frac{ds}{dt} = |t - t_1|(t - t_1)^{2h-2}\sqrt{\psi(t)},$$

$\psi(t)$ étant une fonction qui ne s'annule pas pour $t = t_1$. Il s'introduit bien, comme nous l'avions annoncé, un symbole de valeur absolue.

150. Cosinus directeurs de la tangente dans le sens des arcs croissants. — Menons la tangente en M à la courbe et considérons l'axe T'T porté par cette tangente et orienté dans le sens des arcs croissants. Un segment infiniment petit de cet axe, d'origine M et de mesure algébrique ds, a pour projections sur les trois axes des infiniment petits équivalents aux accroissements des coordonnées quand l'arc subit l'accroissement ds (parce que l'arc est un infiniment petit équivalent à sa corde, en même temps que celle-ci a sa direction infiniment voisine de celle de la tangente), ou encore aux valeurs simultanées des trois différentielles dx, dy, dz. Donc, les cosinus directeurs de l'axe T'T orienté dans le sens des arcs croissants sont

$$(1) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Il est facile de vérifier, en se reportant à ce que nous avons dit à la fin du n° précédent, qu'en un point de rebroussement ces trois quantités changent brusquement de signe.

151. Notion d'indicatrice sphérique. — Considérons la sphère de centre O et de rayon égal à l'unité. Le rayon parallèle à la demi-droite positive MT de l'axe T'T, et de même sens, détermine sur cette sphère un point μ, dont le lieu est une courbe I, qu'on nomme *indicatrice sphérique* de la courbe initiale C[1]. Le cône engendré par $O\mu$, c'est-à-dire le cône des tangentes à C, a pour plan tangent le long de $O\mu$ un plan parallèle au plan osculateur de la courbe C en M (ce dernier étant déterminé en direction par celle de MT et d'une tangente M'T' infiniment voi-

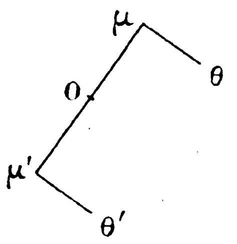
(1) Cette indicatrice offre une discontinuité quand C présente un rebroussement.

sine). Comme $O\mu$ est normal à la sphère, *la tangente en* μ *à la courbe* I *est parallèle à la normale principale en* M *à la courbe* C.

Sens positif de la normale principale. — Adoptons comme sens positif de parcours sur I celui qui correspond au sens positif sur C, et convenons de prendre pour sens positif sur la normale principale le sens MN défini par la demi-tangente $\mu\theta$ à l'indicatrice dans le sens des σ croissants (σ étant l'abscisse curviligne d'un point μ de I). Nous allons démontrer un fait important :

Le sens ainsi déterminé sur MN *est indépendant du sens choisi sur* C.

En effet, changeant de sens sur C, on substitue à μ son symétrique μ' par rapport à O. On modifie en outre le sens de rotation de $\mu\mu'$ autour de O. Donc $\mu\theta$ et $\mu'\theta'$ sont bien de même sens. Il y a plus :



Le sens ainsi déterminé sur la normale principale est encore celui de la concavité de la courbe.

Pour définir cette dernière, supposons essentiellement que M ne soit ni un rebroussement de C, ni un point où la tangente ait plus de deux points confondus avec la courbe. Menons par la tangente MT un plan distinct du plan osculateur. Il divise l'espace en deux régions : nous appelons région de la concavité celle qui contient l'arc de la courbe infiniment voisin de M. Formons l'indicatrice sphérique en faisant coïncider le point O avec le point M lui-même ; du cône des tangentes de sommet M, ne prenons que la nappe engendrée par les demi-droites parallèles aux tangentes dans le sens des s' croissants. Les points de l'arc infiniment voisin de M fournissent des demi-génératrices, qui sont dans la région de convexité si ces points sont antérieurs à M, dans la région de concavité si ces points lui sont postérieurs. Donc la demi-tangente à l'indicatrice dans le sens qui répond au sens de C, ou ce qui revient au même la demi-droite MN, est bien dirigée vers la concavité de C.

152. Courbure. Rayon de courbure. — Soit un arc MM′, dont les extrémités ont s et $s+\Delta s$ comme abscisses curvilignes ; les points μ et μ', qui leur correspondent sur I, ont σ et $\sigma+\Delta\sigma$ comme abscisses sur cette courbe. Par hypothèse, $\Delta\sigma$ est du signe de Δs. Eu outre $\Delta\sigma$ est un infiniment petit équivalent à l'angle des deux demi-tangentes MT et M′T′ ; en appelant ε cet angle, on désigne par *courbure moyenne* le rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$. La *courbure* en M est la limite de ce rapport quand Δs tend vers zéro, ou encore celle de $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$. Elle est donc essentiellement positive et sa valeur est $\frac{d\sigma}{ds}$. Son inverse, $\frac{ds}{d\sigma}$, est une longueur également positive, qu'on appelle rayon de courbure,

$$R=\frac{ds}{d\sigma}.$$

Le point ω de la demi-droite MN tel que $M\omega=R$ s'appelle le *centre de courbure* en M.

153. Formules de Frenet. — Appelons α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de l'axe qui a pour portion positive la demi-droite MN ; ce sont aussi ceux de la tangente $\mu\theta$ à l'indicatrice. Comme le point μ a justement pour coordonnées α, β, γ, nous avons

$$\alpha_1=\frac{d\alpha}{d\sigma},\qquad \beta_1=\frac{d\beta}{d\sigma},\qquad \gamma_1=\frac{d\gamma}{d\sigma},$$

ce qui peut s'écrire

$$\alpha_1=\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma},\qquad \beta_1=\frac{d\beta}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma},\qquad \gamma_1=\frac{d\gamma}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma},$$

ou enfin

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{R},\qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{R},\qquad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{R}.$$

154. Calcul du rayon de courbure. — Nous distinguerons deux cas.

1° On a pu expliciter x, y, z en fonction de l'arc s. Les formules (2)

donnent immédiatement le résultat. En les élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{3}$$

2° Supposons qu'on connaisse seulement x, y, z en fonction d'un paramètre t. Appelons x', y', z' leurs dérivées premières par rapport à t, x'', y'', z'' leurs dérivées secondes. Partant de (3), nous allons appliquer la méthode du changement de variables. Nous avons

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\varepsilon x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\qquad \frac{dy}{ds}=\frac{\varepsilon y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$
$$\frac{dz}{ds}=\frac{\varepsilon z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

où $\varepsilon^2=1$; la valeur de ε sera $+1$ si le sens des t croissants se confond avec celui des s croissants. Dès lors

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\varepsilon x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$
$$=\frac{x''}{x'^2+y'^2+z'^2}-\frac{x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2};$$

finalement, nous sommes amenés à introduire les coefficients de l'équation du plan osculateur,

$$A=y'z''-z'y'',\qquad B=z'x''-x'z'',\qquad C=x'y''-y'x'';$$

et il vient

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{Bz'-Cy'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2},\qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{Cx'-Az'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2},$$
$$\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{Ay'-Bx'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

Élevons au carré et ajoutons, en tenant compte de l'identité de Lagrange et de la relation

$$Ax'+By'+Cz'=0.$$

Ayant divisé haut et bas par $x'^2+y'^2+z'^2$, nous trouvons finalement

$$\frac{1}{R^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}.$$

155. Raison d'être de la notion de centre de courbure. — La définition du centre de courbure pourrait paraître arbitraire. Mais nous allons justifier l'importance de cette notion, en démontrant le théorème suivant :

Théorème. — *L'intersection du plan normal en un point fixe* M *de la courbe et du plan normal en un point* M′ *infiniment voisin a pour position limite la perpendiculaire au plan osculateur de* M, *menée par le centre de courbure relatif à ce point.*

En effet, soit s l'abscisse curviligne de M ; en ce point, le plan normal a pour équation

$$(4) \qquad f(s) = \alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0.$$

Au point M′, d'abscisse curviligne $s + \Delta s$, on peut écrire en abrégé l'équation du plan normal sous la forme

$$f(s + \Delta s) = 0.$$

L'intersection de ces deux plans est aussi dans le suivant

$$\frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} = 0.$$

Ainsi, sa position limite est dans le plan

$$f'(s) = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{d\alpha}{ds}(X - x) + \frac{d\beta}{ds}(Y - y) + \frac{d\gamma}{ds}(Z - z) - \alpha\frac{dx}{ds} - \beta\frac{dy}{ds} - \gamma\frac{dz}{ds} = 0.$$

Finalement, en tenant compte des formules de Frenet, la droite limite du plan normal en M (ou encore sa « caractéristique ») est l'intersection du plan (4) et du plan

$$(5) \qquad \alpha_1(X - x) + \beta_1(Y - y) + \gamma_1(Z - z) = R.$$

Appelons P le point de cette droite qui a pour coordonnées X, Y, Z. L'équation (4) exprime que la projection du vecteur MP sur la tangente est nulle ; l'équation (5) exprime que sa projection sur l'axe MN est égale à R. Donc la projection orthogonale de P sur le plan osculateur en M est le centre de courbure ω (C. q. f. d.).

Les plans normaux à la courbe C forment une famille à un paramètre. Donc ils enveloppent une développable. La droite que nous venons de déterminer est précisément la génératrice de contact d'un de nos plans normaux avec cette développable.

156. Cas des courbes planes. — Examinons en particulier le cas où la courbe C est contenue dans le plan xOy. Son indicatrice se compose alors d'arcs du grand cercle de notre sphère de centre O et de rayon unité, contenu dans ce plan. Chaque fois que M, se déplaçant sur C, rencontre un point d'inflexion, μ rebrousse chemin sur ce cercle.

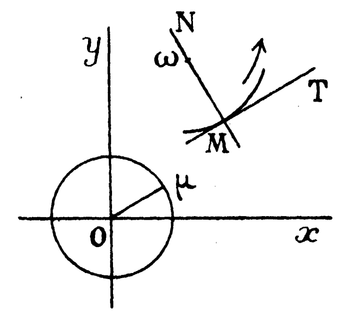
Tous les plans normaux enveloppent ici un cylindre, dont la base est, dans le plan xOy, la *développée* (n° 19[c]) de la courbe C ; l'application du théorème établi au numéro précédent, au cas actuel, nous conduit au résultat important :

Le point de contact de la normale en M *avec son enveloppe est justement le centre de courbure en* M (au sens du n° 152).

On peut ainsi présenter la théorie de la courbure des courbes planes, comme cas particulier de celle des courbes quelconques. Mais pratiquement, au lieu de mettre en jeu l'arc du cercle trigonométrique, regardé comme positif, mais parcouru dans un sens qui dépend de l'orientation de la concavité de l'arc de C dont il fournit l'indicatrice, on préfère introduire la quantité $\frac{ds}{d\varphi}$ en posant

$$\varphi = (\widehat{Ox, MT}) = (\widehat{Ox, O\mu}),$$

MT désignant toujours la demi-tangente dans le sens des arcs croissants, et au lieu de poser



$$R = \frac{ds}{d\sigma},$$

on convient d'écrire

$$R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Le nouveau second membre a même valeur absolue que l'ancien, mais il est d'un signe variable ; on l'appelle *valeur algébrique du rayon de courbure.* Montrons qu'elle représente *l'ordonnée du centre de courbure dans le système d'axes rectangulaires* MT, MN, *de même orientation que le système fixe* Ox, Oy.

En effet, si la concavité de C est à la gauche [1] d'un observateur qui décrit cette courbe dans le sens positif des arcs, l'axe positif MN est dirigé dans le sens de la concavité. Donc $\overline{M\omega}$ est positif. Comme φ va en croissant avec s, il en est de même de $\frac{ds}{d\varphi}$. Inversement, quand $\overline{M\omega}$ est négatif, il en est de même de $\frac{ds}{d\varphi}$. On a donc bien

$$\frac{ds}{d\varphi} = \overline{M\omega}.$$

On peut d'ailleurs donner de ceci une démonstration directe. Les cosinus directeurs de MT sont

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{ds}.$$

Ceux de MN sont

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cherchons l'enveloppe de MN. Cette droite a pour équation

$$(6) \qquad (X - x)\cos\varphi + (Y - y)\sin\varphi = 0.$$

Pour avoir le point où elle touche son enveloppe, associons-lui l'équation dérivée par rapport à s. Il vient

$$(7) \quad (X - x)\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + (Y - y)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Les équations (6) et (7) définissent les projections de $M\omega$ sur MT et MN. La première est nulle, et la seconde vaut $\frac{ds}{d\varphi}$. Le point ω étant situé sur la droite MN, nous avons donc bien

$$\overline{M\omega} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

157. Évaluation du rayon de courbure. — Autant que possible, dans les questions relatives à la courbure, on doit éviter de

[1] La gauche est le côté des y positifs pour un observateur décrivant Ox dans son sens positif.

recourir à d'autres formules que les suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{ds}, \qquad R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

C'est à titre exceptionnel qu'il convient d'utiliser la formule

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

qui donne le rayon de courbure d'une courbe $y = f(x)$; le second membre représente la valeur algébrique de ce rayon de courbure, si l'on prend pour sens des arcs croissants celui des x croissants sur la courbe. En dérivant l'équation de la normale [(2), p. 111] par rapport à x, on obtient également les coordonnées du centre de courbure

$$x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

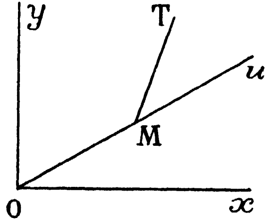
Examinons aussi le cas où la courbe est définie par son équation polaire

$$\rho = f(\theta).$$

Ici encore, il est en général peu commode de se servir de l'expression directe du rayon de courbure, à l'aide de la fonction $f(\theta)$ et de ses dérivées. Il est préférable d'introduire l'angle V, défini de la manière suivante : soit Ou la demi-droite positive du rayon vecteur d'un point M, de telle sorte que

$$(\widehat{Ox, Ou}) = \theta.$$

D'autre part, soit MT la demi-tangente dans le sens des arcs croissants. Nous posons



$$V = (\widehat{Ou, MT}).$$

En posant toujours

$$\varphi = (\widehat{Ox, MT}),$$

nous avons

$$\varphi = \theta + V.$$

D'où nous déduisons

$$\cos V = \cos(\varphi - \theta) = \frac{dx}{ds}\cos\theta + \frac{dy}{ds}\sin\theta = \frac{x\,dx + y\,dy}{\rho\,ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

$$\sin V = \sin(\varphi - \theta) = \frac{dy}{ds}\cos\theta - \frac{dx}{ds}\sin\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{\rho\,ds} = \rho\frac{d\theta}{ds}.$$

Donc, en coordonnées polaires, il suffira pour les problèmes relatifs à la courbure, d'utiliser les formules

$$\cos V = \frac{d\rho}{ds}, \qquad \sin V = \rho \frac{d\theta}{ds}, \qquad R = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

158. Propriétés de la développée d'une courbe plane. — Soient x, y les coordonnées d'un point de la courbe C, exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe, et X, Y celles du centre de courbure ω correspondant. Nous avons

$$X = x + \frac{ds}{d\varphi} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = x - R \sin\varphi,$$

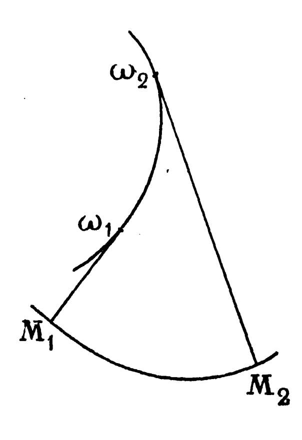
$$Y = y + \frac{ds}{d\varphi} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = y + R \cos\varphi,$$

d'où, en dérivant par rapport à s et simplifiant,

$$\frac{dX}{ds} = -\frac{dR}{ds} \sin\varphi,$$

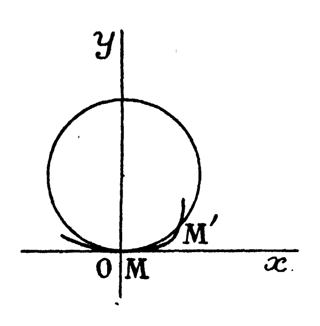
$$\frac{dY}{ds} = \frac{dR}{ds} \cos\varphi.$$

Considérons un arc de la développée qui *n'offre pas de point de rebroussement*. Des formules précédentes, il résulte immédiatement que cet arc a pour longueur la différence $M_2\omega_2 - M_1\omega_1$ des rayons de courbure de C aux points M_1 et M_2, qui correspondent à ses extrémités.



A cause du changement de sens de la tangente dans le sens des arcs croissants en un point de rebroussement, le résultat précédent cesse d'être exact s'il existe un tel point sur l'arc $\omega_1\omega_2$. Nous laissons à l'élève le soin de s'en rendre compte, après avoir fait la figure, et raisonné sur chaque portion située de part et d'autre du point de rebroussement.

159. Théorème. — *Le cercle tangent en* M *à la courbe* C *et passant par un point* M′ *de cette courbe infiniment voisin a pour limite un cercle, dont le centre est le centre de courbure* ω, c'est-à-dire le cercle osculateur (n° 144).



Prenons pour origine le point M, pour axe Ox la tangente en ce point dans le sens des s croissants. Le cercle tangent en O à Ox et passant par M′ a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0.$$

L'ordonnée λ de son centre est fournie, en fonction des coordonnées (x, y) de M′, par la formule

$$\lambda = \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}.$$

Quand M′ tend vers M, λ a même limite que $\frac{x^2}{2y}$. D'autre part, l'ordonnée du centre de courbure en O est la limite de $\frac{s}{\varphi}$ en posant

$$s = \overset{\frown}{\mathrm{OM}'}, \qquad \varphi = (\widehat{\mathrm{O}x, \mathrm{M}'\mathrm{T}'}).$$

Or les infiniment petits s et φ sont respectivement équivalents à x et y'. Le segment $\overline{\mathrm{O}\omega}$ est donc égal à la limite de $\frac{x}{y'}$ ou encore de $\frac{x^2}{xy'}$. Or xy' est un infiniment petit équivalent à $2y$ (un développement de Mac-Laurin de y en fonction de x permet de le vérifier). La proposition en résulte.

Exercice. — Soient, sur une courbe C, deux points M_1 et M_2, tels que l'arc correspondant $\omega_1\omega_2$ de la développée *n'offre pas de rebroussement*. Prenons les cercles osculateurs à C en M_1 et M_2. La distance de leurs centres est la longueur du segment $\omega_1\omega_2$. La différence de leurs rayons est (n° 158) la longueur de l'arc $\omega_1\omega_2$ de la développée. Cet arc surpasse sa corde ; donc, *les cercles osculateurs* à C *en* M_1 *et* M_2 *ne sont pas sécants ; l'un est intérieur à l'autre.*

159 bis. — Développantes d'une courbe plane ou gauche. — Sur une courbe C sans rebroussement, prenons une origine A des

abscisses curvilignes. En chaque point M d'abscisse curviligne positive, menons la tangente T'T (orientée vers les s croissants) et prenons sur sa partie négative MT' un point P, distant de M de la longueur de l'arc AM. Ce point P décrit une courbe Γ appelée *développante* de la portion $s > 0$ de C. Γ est définie par les équations

$$X = x - \alpha s, \qquad Y = y - \beta s, \qquad Z = z - \gamma s,$$

où s peut être regardé comme le paramètre (bien noter qu'il représente l'abscisse curviligne sur C, non sur Γ). Nous avons, d'après les formules de Frenet,

$$\frac{dX}{ds} = -\frac{s}{R}\alpha_1, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{s}{R}\beta_1, \qquad \frac{dZ}{ds} = -\frac{s}{R}\gamma_1.$$

Donc, *la tangente à Γ est parallèle à la normale principale au point correspondant de* C.

A chaque point A de C, il correspond une développante bien déterminée pour la partie de C postérieure à A. Une courbe a donc une infinité de développantes, qui sont, d'après ce qui précède, les trajectoires orthogonales des demi-tangentes, menées dans un sens déterminé (actuellement, le sens négatif). Pour passer d'une de ces développantes à une autre, il n'est pas nécessaire de changer sur C l'origine A, il suffit d'augmenter ou de diminuer MP d'une longueur constante. Si C est un arc fini, en vertu de la définition précédente, cette longueur sera astreinte à rester comprise entre certaines limites. En la supposant arbitraire, on élargit la notion de développante ; moyennant quoi, le théorème du n° 158 peut s'énoncer ainsi : *un arc de courbe plane donnant naissance à un arc de développée sans rebroussement en constitue une développante.*

Exercice. — Considérons trois axes rectangulaires et soient

$$x = f(s), \qquad y = g(s)$$

les équations d'une courbe du plan xOy, le paramètre s désignant l'abscisse curviligne d'un point sur cette courbe. En adjoignant l'équation

$$z = as + b$$

aux deux précédentes, on définit une hélice tracée sur le cylindre dont la section droite est la courbe initiale. On demande d'établir que les développantes de cette hélice sont planes et se confondent avec les développantes de la courbe initiale.

CHAPITRE X

LES COURBES DU SECOND ORDRE

I. — Nature géométrique d'une courbe du second ordre.

160. Cas de décomposition. — L'équation générale d'une courbe du second ordre, en coordonnées homogènes, peut s'écrire

$$(1)\quad f(x, y, t) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''t^2 + 2\mathrm{B}yt + 2\mathrm{B}'tx + 2\mathrm{B}''xy = 0.$$

La courbe n'est décomposée que si elle admet un point d'ordre deux, c'est-à-dire si les trois droites

$$\frac{1}{2}f'_x = \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'t = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_y = \mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}t = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_t = \mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''t = 0$$

sont concourantes ; si deux au moins de ces droites sont distinctes, la courbe a un point singulier unique ; elle est formée de deux droites distinctes. Si ces trois droites sont confondues, la courbe se réduit à une droite double (confondue avec les précédentes), et le polynome $f(x, y, t)$ est alors le carré d'une forme linéaire.

161. Directions asymptotiques. — Faisant jouer maintenant un rôle particulier aux points à l'infini, nous abandonnerons

les coordonnées homogènes, et écrirons l'équation d'une courbe du second ordre sous la forme

$$(2) \quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Le faisceau des directions asymptotiques menées par O a pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Supposons tous les coefficients réels. La réalité des directions asymptotiques dépend du signe de $B^2 - AC$.

1° $B^2 - AC < 0$: les deux directions asymptotiques sont imaginaires conjuguées. Donc tous les points réels de la courbe sont à distance finie.

2° $B^2 - AC = 0$: les deux directions asymptotiques sont confondues ; si l'on suppose C non nul, on a une identité de la forme

$$\varphi(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv C(y - mx)^2.$$

Si C est nul, φ se réduit au terme Ax^2, et si la courbe est véritablement du second ordre, A n'est pas nul.

3° $B^2 - AC > 0$: il y a deux directions asymptotiques réelles et distinctes. Par suite, la courbe admet deux asymptotes réelles (n° 81, rem.), parallèles à chacune de ces directions. Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de ces droites ; chacune d'elles rencontre la courbe en deux points à l'infini ; on en déduit aisément que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$PQ = \text{const}^{\text{te}}.$$

162. Nature géométrique d'une courbe du second ordre indécomposée. — **Théorème I.** — *Lorsque* $B^2 - AC$ *est nul, la courbe* (si elle ne se décompose en deux droites parallèles) *est une parabole.*

En effet, faisons un changement d'axes, le deuxième système étant formé d'axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1 ; pour O_1x_1, prenons une parallèle à la direction asymptotique double. L'équation de la courbe devient

$$y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0.$$

Si D_1 est nul, elle se décompose en deux droites parallèles ou confondues ; écartons ce cas. On peut résoudre par rapport à x_1 et obtenir

$$x_1 = \alpha y_1^2 + \beta y_1 + \gamma,$$

équation qui se ramène, par une translation des axes, à la forme

$$Y^2 = 2pX.$$

La courbe étudiée est donc bien une *parabole* (n° 98).

Théorème II. — *Lorsque* $B^2 - AC$ *n'est pas nul, la courbe possède un centre de symétrie et un seul.*

D'abord, pour que l'origine soit centre, il faut et il suffit que son équation demeure vérifiée quand on remplace x et y par $-x$ et $-y$. Cela exige

$$D = E = 0,$$

ce qui revient à dire que l'équation (2) ne doit pas contenir de terme du premier degré.

Donc, pour qu'un point (u, v) soit centre, il faut et il suffit que la nouvelle équation de la courbe ne contienne plus de termes du premier degré, après la translation d'axes

$$x = u + X, \qquad y = v + Y.$$

Or, le premier membre de (2) devient, par cette transformation,

$$f(u + X, v + Y) = f(u, v) + Xf'_u + Yf'_v + \varphi(X, Y) = 0,$$

φ représentant toujours, dans la théorie actuelle, l'ensemble des termes du second degré de f. Donc pour que (u, v) soit centre, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{2} f'_u = Au + Bv + D = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_v = Bu + Cv + E = 0.$$

Or ce système a une solution unique, en vertu de l'hypothèse

$$AC - B^2 \neq 0. \qquad \text{(C. q. f. d.)}$$

CONSÉQUENCE. — Lorsque les directions asymptotiques sont distinctes, en prenant le centre pour origine et supposant que la courbe est indécomposée, on ramène son équation à la forme

$$(3) \qquad AX^2 + 2BXY + CY^2 = 1.$$

Théorème III. — *Toute courbe du second ordre, non décomposée, et possédant des directions asymptotiques distinctes est une hyperbole ou une ellipse.*

En effet, A, B, C étant réels, l'équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

représente deux droites réelles ou imaginaires conjuguées. Leurs bissectrices (n° 46) sont deux droites réelles et rectangulaires, représentées par l'équation

$$By^2 + (A - C)xy - Bx^2 = 0.$$

Prenons ces dernières droites comme axes [1]. L'équation (3) devient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

Si α et β sont de signes contraires, c'est-à-dire si les directions asymptotiques sont réelles, la courbe est une hyperbole (n° 100); en effet, nous pouvons toujours disposer des notations de manière que α soit positif. En posant

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{b^2},$$

nous trouvons bien l'équation d'une hyperbole.

Si les directions asymptotiques sont imaginaires, α et β sont de même signe.

1° S'ils sont tous deux négatifs, la courbe n'a aucun point réel. On dit que l'équation proposée représente une ellipse imaginaire.

(1) Les directions de ces droites sont celles des axes qui font évanouir le terme rectangle dans l'équation de la courbe. On les nomme *directions principales.*

2° S'ils sont tous deux positifs, on peut poser

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \qquad \beta = \frac{1}{b^2},$$

ce qui ramène à la forme de l'équation de l'ellipse réelle, donnée au n° 100.

En résumé, une équation quelconque du second ordre représente une ellipse, une hyperbole, une parabole, ou un système de deux droites.

Remarque. — Dans le cas où A et C sont de signes contraires, la courbe est toujours une hyperbole. En particulier, la relation

$$A + C = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotes soient rectangulaires. La courbe prend alors le nom d'hyperbole équilatère.

163. Axes d'une courbe du second ordre à centre unique. — Toute courbe du second ordre à centre unique possède, d'après la théorie précédente, deux axes rectangulaires ; ce sont en général les seuls : le cas exceptionnel est constitué par le cercle, qui possède une infinité d'axes de symétrie.

En effet, les axes de symétrie de la conique sont aussi des axes de symétrie du système de ses asymptotes : seules, les deux bissectrices de ces droites répondent à la question, pourvu toutefois qu'elles soient bien déterminées. Or, elles doivent être conjuguées d'une part par rapport aux deux asymptotes, d'autre part, par rapport aux deux droites isotropes issues du centre. Il n'y a donc indétermination que si ces deux couples de droites coïncident, c'est-à-dire si la conique admet pour points à l'infini les points cycliques : or c'est là une propriété qui n'appartient qu'au cercle.

Proposons-nous, étant donnée une conique qui admet l'origine pour centre, de trouver la direction de ses axes. Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$$

Il suffit de construire l'ellipse et l'hyperbole d'après leurs équa-

tions pour constater que l'un des axes fournit, pour chacune de ces courbes, le minimum du rayon vecteur issu du centre. Prenons donc O pour pôle et Ox pour axe polaire. L'un des axes fera l'angle ω avec Ox, si cet angle rend maximum la quantité

$$\frac{1}{\rho^2} = A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega,$$

c'est-à-dire s'il vérifie l'équation obtenue en annulant la dérivée du second membre

$$(C - A)\sin\omega\cos\omega + B(\cos^2\omega - \sin^2\omega) = 0,$$

ou encore

$$B\,\mathrm{tg}^2\omega + (A - C)\,\mathrm{tg}\,\omega - B = 0.$$

Cette équation définit les coefficients angulaires des axes; on retrouve le résultat déjà obtenu à partir des bissectrices des directions asymptotiques.

L'équation précédente est identiquement satisfaite lorsqu'on a

$$A - C = B = 0,$$

c'est-à-dire lorsque $\varphi(x, y)$ se réduit à $x^2 + y^2$, ou enfin (nº 40) lorsque la courbe est un cercle.

164. Sommets. Paramètre. — On appelle *sommet* un point de la courbe situé sur un axe de symétrie. La tangente en ce point est perpendiculaire à l'axe.

Prenons pour axe Ox un axe de la courbe, O étant un sommet situé sur cet axe. L'axe Oy n'est autre que la tangente en O. A cause de la symétrie par rapport à Ox, l'équation de la courbe ne contient ni terme en xy, ni terme en y. Il n'y a pas non plus de terme constant, l'origine étant sur la courbe. Son équation est donc de la forme

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

La quantité p n'est autre que l'abscisse du centre de courbure en O. Sa valeur absolue s'appelle le *paramètre* correspondant

au sommet O. La courbe est une ellipse si q est négatif, une hyperbole s'il est positif, une parabole s'il est nul. Cette forme d'équation montre qu'on peut regarder une parabole comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole, variant de manière qu'un sommet et le cercle de courbure en ce point (qui est d'ailleurs surosculateur) restent fixes, le centre s'éloignant indéfiniment.

II. — Conditions d'homothétie de deux courbes du second ordre.

165. La considération des points à l'infini nous a permis d'établir une classification des courbes du second ordre. Elle va encore nous fournir la solution d'un autre problème : rechercher à quelles conditions deux coniques sont homothétiques. Nous envisageons ici l'homothétie avec toute la généralité que comporte l'algèbre des quantités réelles ou complexes. La question est de voir si, remplaçant dans l'équation de la première courbe x, y, z par des quantités de la forme

$$a+\lambda(x-a), \qquad b+\lambda(y-b), \qquad c+\lambda(z-c),$$

on obtient une équation représentant la seconde.

Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Pour que deux courbes du second ordre soient homothétiques, il faut et il suffit qu'elles aient mêmes directions asymptotiques. S'il s'agit de coniques à centre, on peut alors les regarder comme homothétiques de deux manières différentes. S'il s'agit de paraboles à axes parallèles, elles sont homothétiques d'une seule manière.

La condition est évidemment nécessaire. Établissons qu'elle est suffisante.

1° Chaque courbe a ses directions asymptotiques distinctes, donc un centre unique. Confondons les centres par une translation, ce qui n'altère pas la possibilité d'homothétie (n° 107). Prenons pour origine le centre commun, les axes étant les bissec-

trices des directions asymptotiques. Nos courbes auront des équations de la forme

$$Ax^2 + By^2 = C, \qquad AX^2 + BY^2 = C'.$$

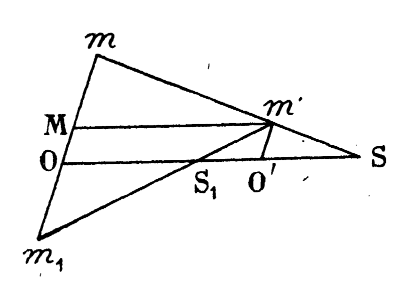
Si l'homothétie est possible, son centre est le centre commun ; appelons λ le rapport d'homothétie éventuel. Les formules de transformation sont

$$X = \lambda x, \qquad Y = \lambda y ;$$

l'homothétique de la première conique se confond avec la seconde si l'on a

$$C\lambda^2 = C'.$$

Cette équation définit pour λ deux valeurs opposées, réelles ou imaginaires : le théorème est donc vrai dans ce cas. On est amené ainsi à regarder deux hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles comme homothétiques, dans un rapport réel ou imaginaire, suivant que les axes transverses sont parallèles ou perpendiculaires.



Quand les centres O et O' de deux coniques homothétiques sont distincts, elles admettent deux centres d'homothétie S et S_1, situés sur la droite OO' et tels que

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = -\frac{\overline{S_1O'}}{\overline{S_1O}} = \frac{\overline{O'm'}}{\overline{Om}} = \lambda ;$$

ces relations montrent que S et S_1 ne seront réels que si λ l'est lui-même.

2° Chaque courbe est une parabole. Les axes sont, par hypothèse, parallèles. Par translation, amenons les sommets et, par suite, les axes à coïncider ; un calcul très simple, que l'élève fera, montre alors l'unicité d'une homothétie faisant correspondre la seconde parabole à la première.

Conséquence. — Deux courbes homothétiques du second ordre ont deux points communs à l'infini : donc elles ont, au plus, deux points communs à distance finie. Ces deux points peuvent être eux-mêmes rejetés à l'infini. Il en est ainsi :

1° Si la première courbe possède un centre unique, confondu avec le centre d'homothétie ;

2° Si la première courbe est une parabole, la seconde s'en déduisant par translation le long de l'axe.

Pour le voir, il suffit d'écrire les équations homogènes des deux courbes. Il est avantageux de choisir les axes de manière que la première ait immédiatement son équation sous forme réduite. Dans le premier cas, nous aurons les équations

$$Ax^2 + By^2 = t^2,$$
$$Ax^2 + By^2 + 2Dtx + 2Ety + Ft^2 = 0.$$

Pour que les quatre points communs à ces deux courbes soient rejetés à l'infini, il faut qu'on ait $D = E = 0$, etc... Nous laissons à l'élève le soin d'achever.

III. — Les modes de définition géométrique communs aux trois courbes du second ordre (point de vue ponctuel).

166. Sections du cône à base circulaire. — Dans les cours de géométrie élémentaire, on établit que toute section plane d'un cône de révolution est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. En utilisant les théorèmes généraux de la géométrie analytique, nous voyons sans peine que cette proposition n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus étendu. Un cône ayant pour base une courbe algébrique plane d'ordre m est lui-même d'ordre m, ainsi que toutes ses sections planes. Dans le cas de $m = 2$, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Si un cône a pour base une ellipse, une hyperbole ou une parabole, il a pour sections planes des ellipses, des hyperboles et des paraboles.

Ce théorème s'applique en particulier au cône à base circulaire.

C'est pour cette raison que l'on a donné aux courbes du second ordre le nom de *coniques*.

167. Définition basée sur la considération d'un foyer et d'une directrice. — Théorème. — *Le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe* (foyer) *et à une droite fixe* (directrice) *est constant est une conique.*

En effet, prenons l'origine au point fixe, l'axe Ox étant perpendiculaire à la directrice, qui aura pour équation $x = d$. Soit e le rapport constant. L'équation du lieu sera

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2.$$

Ce lieu est une hyperbole si e surpasse 1, une parabole s'il lui est égal, une ellipse s'il lui est inférieur. Le nombre e s'appelle l'*excentricité*.

Remarque. — Si l'on passe en coordonnées polaires, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \rho^2 = e^2(\rho \cos \omega - d)^2;$$

on a donc, ou bien

$$(3) \qquad \rho + e(\rho \cos \omega - d) = 0,$$

ou bien

$$(3\ bis) \qquad \rho - e(\rho \cos \omega - d) = 0.$$

L'équation (3 *bis*) se déduit de (3) en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\omega + \pi$, donc elle représente la même courbe qu'elle. On peut donc se borner à la première. On a donc

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \omega}.$$

Comme exercice, l'élève vérifiera que ed est le paramètre relatif à l'un des sommets situés sur Ox. Ce paramètre est donc égal à la demi-corde perpendiculaire à l'axe focal.

Réciproquement, toute conique peut être regardée comme le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et

à une droite fixe a une valeur constante. Soient F un tel point, D une telle droite : F s'appelle un foyer, D est la directrice correspondante.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer qu'on peut ramener l'équation d'une conique quelconque à la forme

$$(4) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \lambda)^2;$$

L'équation (4) est en effet celle d'une conique qui admet pour foyer le point (x_0, y_0), pour directrice la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \lambda = 0,$$

l'excentricité ayant la valeur e.

Nous pouvons prendre l'équation de la conique proposée sous forme réduite.

1° Cas d'une conique a centre. — Pour que l'on puisse à l'équation (4) identifier une équation telle que

$$(5) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0, \qquad (\text{A, B réels})$$

il faut qu'il n'y ait dans (4) ni terme en xy, ni terme en x, ni terme en y, ce qui déjà exige :

ou bien $\quad \sin \alpha = 0, \quad$ avec $\quad y_0 = 0,$
ou bien $\quad \cos \alpha = 0, \quad$ avec $\quad x_0 = 0.$

Cela nous montre que si la courbe (5) admet un foyer, ce point est forcément situé sur l'un de ses axes. Cela posé, s'il existe sur Ox un foyer d'abscisse

$$c = \varphi(A, B),$$

on en déduira un foyer d'ordonnée $\varphi(B, A)$ sur Oy. Donc, on peut se borner à chercher les foyers situés sur Ox. On est ramené à identifier l'équation (5) avec

$$(4 \textit{ bis}) \qquad (x - c)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2,$$

ou

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2(e^2 d - c)x = e^2 d^2 - c^2.$$

Cette identification conduit au système

$$A(1 - e^2) = B = e^2d^2 - c^2, \qquad c = e^2d.$$

Dans les deux premières équations, remplaçons c^2 par e^4d^2. Il vient

$$A = e^2d^2, \qquad B = A - c^2,$$

d'où

$$c^2 = A - B,$$

$$d = \frac{A}{c}.$$

Il y a donc possibilité de déterminer c et d, et on peut énoncer maintenant les résultats suivants :

1° *Une ellipse réelle*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a > b)$$

possède sur son grand axe deux foyers réels, d'abscisses $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$, *et sur son petit axe deux foyers imaginaires, d'ordonnées* $\pm i\sqrt{a^2 - b^2}$.

2° *Une hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

possède sur son axe transverse deux foyers réels, d'abscisses $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, *et sur son axe non transverse deux foyers imaginaires, d'ordonnées* $\pm i\sqrt{a^2 + b^2}$.

2° Cas d'une parabole. — Soit la parabole

$$y^2 - 2px = 0.$$

Son équation ne contient ni terme en x^2, ni terme en xy, ni terme en y. En l'identifiant avec (4), il vient

$$y_0 = \sin \alpha_0 = 0.$$

Il n'y a donc pas de foyer en dehors de Ox. En continuant l'identification, on voit que e^2 doit être égal à l'unité. L'élève achèvera et constatera qu'*il y a un foyer unique : c'est le point de* Ox *qui a pour abscisse* $\frac{p}{2}$.

168. Génération à l'aide d'un foyer et du cercle directeur associé. — Ce nouveau mode de définition ne diffère pas du précédent dans le cas de la parabole. Bornons-nous donc à considérer une conique ayant pour centre l'origine, l'axe Ox étant l'axe focal. Soit c l'abscisse de F, d celle de la directrice D correspondante. L'équation de la courbe s'écrit indifféremment

$$(x-c)^2+y^2=e^2(x-d)^2,$$
$$(x+c)^2+y^2=e^2(x+d)^2,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$MF=e|x-d|, \qquad MF'=e|x+d|.$$

Pour une ellipse, entièrement située entre ses directrices, x^2-d^2 est négatif. Donc $x-d$ et $x+d$ sont de signes contraires. On a donc alors

$$MF=e(d-x), \qquad MF'=e(d+x), \qquad (d>0)$$

d'où

$$MF+MF'=2ed=2a.$$

Pour une hyperbole, x^2-d^2 est positif : $x-d$ et $x+d$ sont de même signe. On a donc, ε étant égal à ± 1,

$$\varepsilon\,.\,MF=e(x-d),$$
$$\varepsilon\,.\,MF'=e(x+d),$$

de sorte que

$$MF-MF'=\pm 2ed=\pm 2a.$$

Ainsi, *la somme, pour l'ellipse, la différence, pour l'hyperbole* (celle-ci en valeur absolue), *des distances d'un point de la courbe aux foyers est constante et égale à la longueur de l'axe focal.*

Associons au foyer F le cercle Γ, de centre F′ et de rayon $2a$. Le cercle Γ s'appelle *cercle directeur associé au foyer* F. Nous pouvons donner à l'énoncé précédent la forme que voici :

Un cercle ayant son centre sur une ellipse ou une hyperbole et passant par un foyer est tangent au cercle directeur associé à ce foyer.

En résumé, toute conique peut se définir comme le lieu des centres des cercles passant par un point fixe F *et tangents à un cercle fixe* Γ. Celui-ci peut se réduire à une droite : la conique est alors une parabole. Sinon, F sera ou bien à l'intérieur de Γ, la conique est alors une ellipse ; ou bien à l'extérieur, la conique est une hyperbole.

Montrer, comme exercice, que la directrice qui correspond au foyer F est l'axe radical du cercle Γ et du cercle de rayon nul de centre F. A cet effet, évaluer la différence des puissances d'un point de la courbe par rapport à ces cercles et en déduire la constance du rapport des distances de ce point à F et à leur axe radical.

IV. — Propriétés projectives des coniques (¹). — Pôles et polaires.

169. Points conjugués par rapport à une conique. Tangente. — Les propriétés que nous allons étudier maintenant se conservent lorsqu'on fait subir à la figure qu'elles concernent une perspective ou une transformation homographique quelconque. Elles sont indépendantes du fait que la conique soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Dans la théorie projective des courbes du second ordre, la notion de *points conjugués* joue un rôle fondamental ; elle englobe en particulier la détermination de la tangente en un point. Nous allons donc introduire cette notion.

Nous dirons que deux points $M_1(x_1, y_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, t_2)$ sont conjugués par rapport à la conique

$$f(x, y, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''t^2 + 2Byt + 2B'tx + 2B''xy = 0$$

s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points de rencontre de cette courbe et de la droite M_1M_2.

Un point de cette droite a pour coordonnées homogènes

$$x_1 + \lambda x_2, \qquad y_1 + \lambda y_2, \qquad t_1 + \lambda t_2.$$

(¹) Nous avons rencontré déjà de telles propriétés, nᵒˢ 117 et 118.

Les λ des points de rencontre de M_1M_2 et de la conique sont les racines de l'équation

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, t_1 + \lambda t_2) = 0,$$

ou

$$f(x_1, y_1, t_1) + \lambda(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + t_2 f'_{t_1}) + \lambda^2 f(x_2, y_2, t_2) = 0;$$

pour que ces points divisent harmoniquement M_1M_2, il faut et il suffit que leurs λ soient opposés, c'est-à-dire que l'on ait

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + t_2 f'_{t_1} = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} Ax_1x_2 + A'y_1y_2 + A''t_1t_2 + B(y_1t_2 + t_1y_2) + B'(t_1x_2 + x_1t_2) \\ + B''(x_1y_2 + y_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

Le premier membre de cette relation s'appelle *forme polaire* de la forme quadratique $f(x, y, t)$. Ainsi qu'on devait s'y attendre, elle fait intervenir symétriquement les points M_1 et M_2, ce qui donne lieu à l'identité

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + t_2 f'_{t_1} \equiv x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + t_1 f'_{t_2}.$$

170. Polaire d'un point. — Le lieu des conjugués d'un point fixe M_1 est la droite

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + t f'_{t_1} = 0.$$

On lui donne le nom de *polaire* du point M_1.

Si M_1 est sur la courbe, *cette équation n'est autre que celle de la tangente en* M_1 (n° 75). Donc :

Une tangente à une conique est le lieu des conjugués de son point de contact.

Cet énoncé suppose que *la conique est indécomposée* : il entraîne alors que la polaire d'un point non situé sur la courbe passe par les points de contact des tangentes menées de ce point (n° 128). Réciproquement, toute droite peut être regardée comme la polaire du point d'intersection des tangentes menées aux points où elle rencontre la conique. Ce point s'appelle le *pôle* de la droite.

Si une conique est décomposée en deux droites distinctes, son point double est conjugué par rapport à tout autre point. Donc la polaire de tout point B, par rapport à un système de deux droites, passe par leur point commun A. Inversement, une droite passant par A possède une infinité de pôles, situés sur une droite issue de A. Une droite qui ne passe pas par A a tous ses points conjugués de A, mais on ne peut dire que A en soit le pôle, la polaire de ce point étant indéterminée.

171. La réciprocité entre deux points conjugués entraîne immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Si le point* M *décrit la droite* (α), *la polaire* (μ) *de* M *tourne autour du pôle* A *de la droite* (α). Inversement, le pôle d'une droite qui tourne autour d'un point engendre la polaire de ce point.

Il importe de remarquer en outre que le rapport anharmonique de quatre positions de M sur la droite (α) est égal à celui des quatre droites (μ) correspondantes autour du point A. En effet, prenons sur la droite (α) deux positions $M'(x', y', t')$ et $M''(x'', y'', t'')$ du point M. Un point quelconque M de (α) aura pour coordonnées

$$x' + \lambda x'', \qquad y' + \lambda y'', \qquad t' + \lambda t'' ;$$

le rapport anharmonique de ces quatre points est celui de leurs λ ; il est donc le même que celui de leurs polaires, car celle de M a pour équation

$$x'f'_x + y'f'_y + t'f'_t + \lambda(x''f'_x + y''f'_y + t''f'_t) = 0.$$

172. Équation de l'ensemble des tangentes menées d'un point à une conique. — Soit la conique

$$f(x, y, t) = 0,$$

et le point $M_0(x_0, y_0, t_0)$. Pour qu'un point $M(x, y, t)$ appartienne au lieu, il faut et il suffit que la droite M_0M coupe la conique en deux points confondus. Or tout point de cette droite a pour coordonnées homogènes

$$x_0 + \lambda x, \qquad y_0 + \lambda y, \qquad t_0 + \lambda t.$$

La condition cherchée est donc que l'équation

$$f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, t_0 + \lambda t) = 0$$

ait une racine double en λ. Donc, l'ensemble des tangentes menées de M_0 est représenté par

$$(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + tf'_{t_0})^2 - 4f(x_0, y_0, t_0)f(x, y, t) = 0.$$

173. Triangle conjugué par rapport à une conique. — Étant donnée une conique indécomposée, il existe une infinité de triangles, à trois paramètres, dont les sommets sont deux à deux conjugués par rapport à cette courbe. En effet, soient A et B deux points conjugués. Il y a un seul point C conjugué à la fois de A et B ; c'est le point commun à leurs polaires ; le triangle ABC possède alors la propriété demandée. Chaque sommet a pour polaire le côté opposé.

V. — Propriétés du type linéaire [1]. — Théorie des diamètres.

174. La distinction des courbes du second ordre en ellipses, hyperboles et paraboles a pour point de départ une propriété linéaire : tangence ou non tangence de la droite de l'infini à la courbe. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

La projection cylindrique d'une ellipse, d'une hyperbole, ou d'une parabole est une conique de la même espèce.

Dans tous les énoncés qui se rattachent au type linéaire, nous aurons donc à distinguer entre les coniques à centre et la parabole. Si, en outre, nous faisons intervenir la réalité des éléments mis en jeu, l'ellipse et l'hyperbole donneront naissance à des énoncés distincts.

Pour obtenir des propriétés linéaires des coniques, nous par-

---

(1) Il s'agit des propriétés qui subsistent quand la courbe subit une transformation linéaire, par exemple lorsqu'on la projette cylindriquement (n° 109).

tirons des résultats projectifs de la section précédente et nous ferons jouer à la droite de l'infini un rôle particulier.

175. Diamètre conjugué d'une direction. — Appliquons le théorème de la polaire d'un point, en supposant ce point à l'infini ; soient α, β, 0 ses coordonnées homogènes. Toutes les cordes issues de ce point sont parallèles à la direction de paramètres α, β. Sur chacune d'elles, le conjugué du point à l'infini est le milieu des deux extrémités. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le lieu des milieux des cordes parallèles à la direction (α, β) *est la droite*

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0. \tag{1}$$

On l'appelle le diamètre conjugué de la direction (α, β). Son équation, établie en coordonnées homogènes, conserve la même forme en coordonnées non homogènes, car on passe du premier cas au second en faisant $t = 1$.

Le point $(\alpha, \beta, 0)$ n'est situé sur la conique que si elle admet la direction asymptotique (α, β) : dans ce cas, l'équation (1) se réduit à celle de l'asymptote si la courbe est une conique à centre ; elle représente la droite de l'infini dans le cas d'une parabole. Mais, dans cette hypothèse, le problème de la recherche du milieu des cordes de direction (α, β) ne se pose plus, une droite parallèle à cette direction coupant la courbe en un seul point à distance finie. Toutefois, dans le cas des coniques à centre, pour conserver la généralité de certaines réciproques, on conserve à la droite (1) le nom de diamètre, et on l'appelle *diamètre singulier*.

176. Propriétés des diamètres : 1° Dans les coniques à centre. — *Tous les diamètres passent par le centre,* puisqu'en ce point f'_x et f'_y s'annulent. Réciproquement, toute droite passant par le centre est un diamètre (grâce à l'introduction des diamètres singuliers), car une telle droite appartient au faisceau linéaire déterminé par

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

Diamètres conjugués. — Soient A et B les points de rencontre de la conique et de la droite de l'infini, M un autre point de cette droite, M' son conjugué sur celle-ci. La polaire de M est la droite qui joint M' au centre, et réciproquement. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Dans une conique à centre, *il y a réciprocité entre une direction et celle du diamètre des cordes parallèles à cette direction.* Autrement dit, il existe une infinité de couples de droites, tels que chaque droite soit le diamètre conjugué des cordes parallèles à l'autre. Les deux droites de l'un de ces couples sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions asymptotiques de la courbe. Les rayons d'un tel couple, liés involutivement, constituent deux diamètres conjugués. La tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au diamètre conjugué.

Démontrer, à titre d'exercice, ces propriétés par le calcul, en supposant la conique rapportée à ses axes. Soit

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

son équation. Entre les coefficients angulaires m et m' de deux diamètres conjugués, on établira la relation

$$mm'=-\frac{B}{A}.$$

Dans le cas de l'ellipse, les asymptotes sont imaginaires ; pour construire le diamètre d'une direction, on construit d'abord son symétrique par rapport à un des axes. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette dernière droite est conjuguée de la parallèle à cette direction, menée par le centre, par rapport aux diagonales du rectangle ayant mêmes axes que l'ellipse. On peut aussi considérer l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

comme déduite du cercle

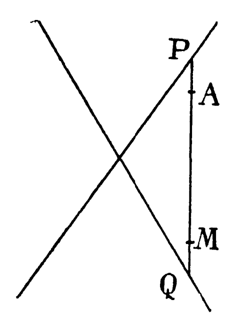
$$X^2+Y^2=a^2,$$

par la transformation linéaire

$$x = X, \qquad y = \frac{b}{a} Y,$$

qui consiste en une multiplication des ordonnées par le rapport constant $\frac{b}{a}$. Deux diamètres conjugués de l'ellipse proviennent alors de deux diamètres rectangulaires de ce cercle. La considération de ce cercle, connu sous le nom de *cercle principal*, fournit d'ailleurs le moyen de résoudre rapidement de nombreux problèmes usuels relatifs à l'ellipse : points d'intersection avec une droite, tangentes menées d'un point, etc...

Dans le cas de l'hyperbole, les asymptotes étant réelles, la construction d'un diamètre est immédiate. Pour trouver la conjuguée harmonique, par rapport à ces asymptotes, d'une droite issue de O et parallèle à la direction donnée, on peut lui mener un segment parallèle terminé sur les asymptotes et joindre O au milieu de ce segment ; ainsi, *le diamètre d'une direction est le même pour la courbe et le système des deux asymptotes*. On en déduit aisément la construction par points d'une hyperbole déterminée par ses asymptotes et un point A. Par A, on mène une sécante quelconque, rencontrant les asymptotes en P et Q, et l'on porte



$$\overline{QM} = \overline{AP}.$$

Le point M est un point de la courbe. De cette propriété, on déduit que la tangente en M s'obtient en prenant la conjuguée de OM par rapport aux asymptotes, et lui menant de M la parallèle.

2° **Dans la parabole.** — *Tous les diamètres sont parallèles à l'axe.* — En effet, la parallèle menée par l'origine à un diamètre a pour équation

$$\alpha\varphi'_x + \beta\varphi'_y = 0 ;$$

puisque la courbe est une parabole, on a

$$\varphi(x, y) = (\lambda x + \mu y)^2,$$

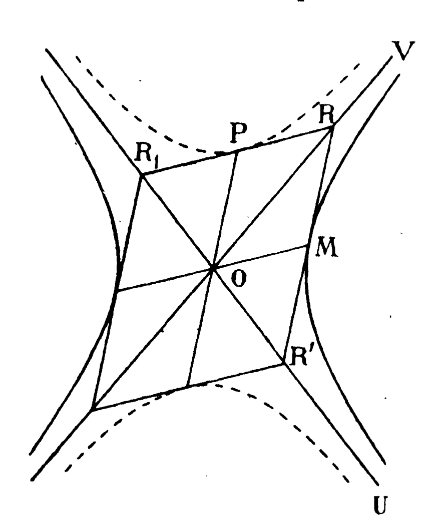
φ'_x et φ'_y sont proportionnels à $\lambda x + \mu y$, ce qui démontre la proposition. On peut aussi l'établir en remarquant que le conjugué du point à l'infini de la direction dont on cherche le diamètre, coïncide avec les deux points de rencontre confondus de la courbe et de la droite de l'infini, c'est-à-dire est justement le point à l'infini sur l'axe.

Un diamètre rencontre donc la courbe en un seul point ; il s'ensuit qu'il n'y a qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée.

177. Autres propriétés, de type linéaire, des coniques à centre. — 1° Hyperboles conjuguées. — Soit l'hyperbole H. Prenons la tangente en un point M de cette courbe ; soient R et R′ ses points de rencontre avec les asymptotes. Le point M est le milieu de RR′. Par rapport au système d'axes obliques formé par ses asymptotes, l'hyperbole a pour équation

$$XY = \text{const}^{\text{te}}.$$

Il en résulte aisément que le triangle ORR′ a une aire constante.



Soit R_1 le symétrique de R′ par rapport au centre O de H. Le triangle ORR_1 est équivalent à ORR′. On en déduit aisément que RR_1 reste tangent, en son milieu P, à une deuxième hyperbole H_1. En vertu de l'équivalence précédente, il est clair que les hyperboles H et H_1 sont réciproques. On leur donne le nom d'*hyperboles conjuguées.*

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués, l'un Ox rencontrant H en A, l'autre Oy rencontrant H_1 en B. En remarquant que les équations de H et H_1 ne con-

tiennent pas de terme du premier degré, que, dans l'une et l'autre, l'ensemble des termes du second est

$$\frac{x^2}{\overline{OA}^2} - \frac{y^2}{\overline{OB}^2},$$

on conclut aisément que les équations de ces courbes sont :

1° pour H, $$\frac{x^2}{\overline{OA}^2} - \frac{y^2}{\overline{OB}^2} = 1 ;$$

2° pour H_1, $$\frac{x^2}{\overline{OA}^2} - \frac{y^2}{\overline{OB}^2} = -1.$$

Les diamètres Ox et Oy ayant été choisis arbitrairement, la forme de ces équations nous conduit au théorème suivant, qui n'appartient plus au type linéaire, mais qui se rattache au point de vue métrique :

Le carré de la longueur d'un demi-diamètre de H *et le carré de la longueur du demi-diamètre de l'hyperbole conjuguée porté par la même droite sont des nombres opposés.*

Par carré de la longueur, nous entendons naturellement : expression analytique du carré de la longueur. A cause de l'énoncé précédent, faisant intervenir non plus seulement l'idée de direction, mais celle de longueur, on donne souvent le nom de demi-diamètres conjugués à OM et OP.

178. Théorèmes d'Apollonius. — Considérons d'abord une hyperbole. Menons également sa conjuguée. Nous voyons immédiatement que l'aire du parallélogramme OMRP est égale à celle du triangle ORR'. Ainsi :

Dans l'hyperbole, l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante.

De cet énoncé, qui appartient au type linéaire (1), on déduit une *relation métrique* importante, entre les longueurs de deux demi-

(1) C'est une conséquence du théorème suivant : la projection cylindrique d'une aire plane sur un plan est égale au produit de cette aire par un facteur dépendant de l'angle des plans et de la direction des projetantes.

Pour le voir, évaluer le rapport de l'aire initiale, puis celui de sa projection cylindrique, à celle d'une section droite du cylindre projetant.

diamètres conjugués. Laissons à l'élève le soin de vérifier qu'étant données deux droites fixes OU et OV, sur lesquelles s'appuie un segment RR' de milieu M, la quantité [1]

$$\overline{OM}^2 - \overline{MR}^2$$

est proportionnelle à l'aire ORR'. En appliquant cette proposition au cas actuel, nous sommes conduits au théorème suivant :

Dans l'hyperbole, la différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante.

Les deux énoncés précédents constituent les théorèmes d'Apollonius pour l'hyperbole. De là, on passe facilement, et sans calcul, au cas de l'ellipse.

Pour l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si nous nous passons de la courbe conjuguée, les véritables carrés des longueurs de nos demi-diamètres sont $\overline{OM}^2$ et $-\overline{OP}^2$. C'est donc leur somme algébrique qui demeure constante ; cet énoncé peut naturellement se vérifier par un calcul qui s'appliquera à toute conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Dans le cas de l'ellipse, nous aurons donc la même proposition, mais, cette fois, chaque terme de notre somme algébrique est positif. D'où l'énoncé du théorème métrique :

Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante.

La forme du premier théorème reste la même, puisque pour passer du premier cas au second, il suffit de supprimer un facteur égal à i dans le premier membre de la relation qui l'exprime.

179. Nous terminerons ces considérations par une proposition qui permet de trouver les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole donnée par ses asymptotes et un point.

---

(1) Pour l'établir, on s'appuiera sur la relation métrique suivante :

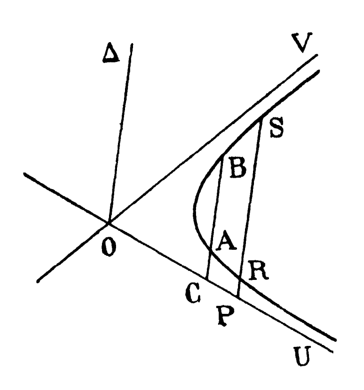
$$\overline{OR}^2 + \overline{OR'}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{MR}^2.$$

En tenant compte de la constance de l'aire ORR', on formera

$$(OR + OR')^2 - \overline{RR'}^2 \qquad \text{et} \qquad (OR - OR')^2 - \overline{RR'}^2, \text{ etc...}$$

Théorème. — *Le produit des segments de direction fixe ayant leur origine commune sur une asymptote et leurs deux extrémités sur l'hyperbole est constant.*

Nous laisserons à l'élève le soin d'établir cette proposition par le calcul. Nous la rattacherons à l'involution (n° 127). La sécante PRS passe par un point fixe, le point à l'infini sur Δ. Donc en joignant R et S au point à l'infini sur OU, les droites obtenues se correspondent par involution. Or ce sont les projetantes, dans une projection cylindrique de direction OU. Leurs points de rencontre *r* et *s* avec OΔ sont donc aussi liés involutivement ; O est d'ailleurs le point central de cette correspondance. On a donc bien



$$\overline{Or}\,.\,\overline{Os} = \overline{PR}\,.\,\overline{PS} = \text{const}^{\text{te}}.$$

Cette valeur constante est manifestement opposée au carré du demi-diamètre porté par OΔ.

Application. — Soit à chercher les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole définie par ses asymptotes et un point A.

Soient R et S les points de rencontre cherchés, P et Q ceux où la droite coupe les asymptotes. On connaît la somme $\overline{PR} + \overline{PS} = \overline{PQ}$; le produit $\overline{PR}\,.\,\overline{PS}$ est donné en appliquant le théorème précédent ; menons par A la parallèle à la sécante ; soit B son deuxième point de rencontre avec l'hyperbole et C son point de rencontre avec OU. On a

$$\overline{PR}\,.\,\overline{PS} = \overline{CA}\,.\,\overline{CB}.$$

On est donc amené à construire les racines d'une équation du second degré.

VI. — Coniques au point de vue tangentiel.

180. Équation tangentielle d'une conique. — Nous avons vu (n° 133) qu'une conique indécomposée est de seconde classe et que son équation tangentielle est indécomposée. Soit

$$\psi(u, v, w) = 0$$

cette équation.

Pour que la courbe soit une parabole, il faut et il suffit qu'elle admette une direction asymptotique double, ou encore soit tangente à la droite de l'infini, ou enfin que son équation tangentielle manque de terme en w^2.

Pour que la conique soit une ellipse, il faut et il suffit qu'elle admette des tangentes réelles, de coefficient angulaire quelconque, ou que l'équation $\psi = 0$, ordonnée en w, admette des racines quel que soit le rapport $\frac{v}{u}\cdot$ En développant ψ,

$$\psi = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

la condition cherchée est

$$(bb' - a''b'')^2 - (b'^2 - aa'')(b^2 - a'a'') < 0.$$

Si le premier membre est positif, la conique est une hyperbole.

181. Nous laissons à l'élève le soin de vérifier que la conique à centre

(1) $$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

a pour équation tangentielle

(1 *bis*) $$Au^2 + Bv^2 = w^2$$

et que la parabole

(2) $$y^2 = 2px$$

a pour équation tangentielle

$$pv^2 - 2uw = 0. \qquad (2\ bis)$$

De là, on déduit les équations des tangentes de direction donnée, menées à ces courbes. Pour la conique (1), les tangentes de coefficient angulaire m sont données par

$$y = mx \pm \sqrt{Am^2 + B}. \qquad (3)$$

Pour la parabole (2), l'unique tangente de coefficient m a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \qquad (4)$$

Chacune des équations (3) et (4) (la première rendue rationnelle) fait connaître les coefficients angulaires des tangentes menées d'un point (x, y) à la courbe. Le lieu des points tels que ces tangentes soient rectangulaires est, dans le cas d'une conique à centre, un cercle concentrique

$$x^2 + y^2 = A + B,$$

et, dans le cas de la parabole, la directrice.

182. Mode géométrique de définition tangentielle, commun aux trois coniques. — Nous avons vu qu'une conique peut être définie ponctuellement comme le lieu des centres des cercles C passant par un point fixe F et tangents à un cercle fixe Γ (n° 168). Soit M le centre d'un cercle C, φ son point de contact avec Γ. Les points F et φ sont symétriques (n° 144) par rapport à la tangente au lieu de M. Donc :

Le lieu des symétriques d'un foyer d'une conique par rapport à ses tangentes est le cercle directeur associé à ce foyer (la directrice, s'il s'agit d'une parabole).

Par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, faite en prenant pour centre ce foyer, on en déduit l'énoncé suivant :

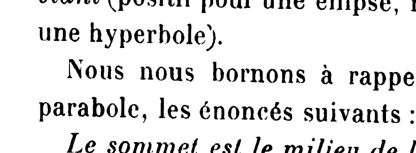
Le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes est le cercle principal, s'il s'agit d'une conique à centre, *ou la tangente au sommet,* pour une parabole.

Nous parvenons donc à réunir les trois coniques dans une même définition tangentielle :

Une conique est l'enveloppe des droites sur lesquelles un point fixe se projette en un point qui décrit un cercle ou une droite. Dans le premier cas, on obtient une conique à centre (ellipse, si le point est intérieur au cercle, etc...), dans le second, une parabole.

De là, le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle permet, pour une conique à centre, de déduire l'énoncé suivant :

Le produit des distances des foyers à une tangente est constant (positif pour une ellipse, négatif pour une hyperbole).



Nous nous bornons à rappeler, pour la parabole, les énoncés suivants :

Le sommet est le milieu de la sous-tangente ;

La sous-normale est constante et égale au paramètre.

183. Propriété caractéristique des foyers. — **Théorème.** — *Pour qu'un point soit foyer d'une conique, il faut et il suffit que les tangentes menées de ce point à la courbe soient les droites isotropes.*

1° La condition est nécessaire. En effet, une conique qui a pour foyer le point O a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 = (ux + vy + w)^2.$$

Les droites

$$y = \pm ix$$

coupent cette courbe en deux points confondus. Donc, ce sont bien les tangentes menées de O. Les points de contact sont situés sur la droite

$$ux + vy + w = 0,$$

c'est-à-dire sur la directrice. Donc *chaque foyer a pour polaire la directrice correspondante.*

2° La condition est suffisante. En effet, l'équation de l'ensemble des tangentes menées de l'origine à la conique

$$f(x, y) = 0$$

est de la forme (n° 172)

$$f(x, y) - D^2 = 0,$$

D désignant le premier membre de l'équation d'une droite. Si les tangentes menées de O sont les droites isotropes, nous avons l'identité

$$f(x, y) - D^2 \equiv \lambda(x^2 + y^2).$$

Donc l'équation de la courbe est

$$\lambda(x^2 + y^2) + D^2 = 0$$

et le point O est foyer. (C. q. f. d.)

Remarque. — On pourrait aussi raisonner géométriquement : pour trouver une des tangentes menées de F, il faut déterminer le point P de manière que FP soit confondue avec la perpendiculaire PP'. Or, pour cela, il faut que FP soit une droite isotrope.

VII. — Application de la théorie de la corrélation aux coniques.

184. La courbe corrélative d'une conique indécomposée est une conique indécomposée. Tout théorème relatif aux coniques donne naissance, si l'on transforme son énoncé par corrélation, à un nouveau théorème qui se rapporte aussi aux coniques. L'énoncé de ce dernier se déduit de celui de la proposition initiale au moyen d'un dictionnaire réciproque du type suivant :

points	droites
en ligne droite	concourantes
intersection de deux courbes	tangente commune aux deux corrélatives
polaire d'un point	pôle de la droite corrélative (par rapport à la conique corrélative).

Montrons que ces deux derniers éléments sont bien corrélatifs. La polaire d'un point A est la droite D joignant les points de contact des tangentes à la conique C issues de A ; le corrélatif de cette polaire est donc le point de concours des tangentes aux points d'intersection de la conique Γ (corrélative de C) et de la droite corrélative de A, ce qui établit la propriété annoncée.

C'est ainsi que la notion de points conjugués, transformée par corrélation, engendre celle de *droites conjuguées*. Faisons sur cet exemple la traduction dont nous avons parlé plus haut :

Deux points sont conjugués par rapport à une conique, lorsqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points de rencontre de la droite qui les joint et de la conique.	Deux droites sont conjuguées par rapport à une conique, lorsqu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées par leur point d'intersection.

Dans cette traduction, l'harmonicité subsiste du fait que le rapport anharmonique de quatre points alignés est égal à celui des quatre droites corrélatives.

Pour que deux droites

$$u_1x + v_1y + r_1t = 0, \qquad u_2x + v_2y + r_2t = 0$$

soient conjuguées par rapport à la conique qui a pour équation tangentielle

$$\psi(u, v, r) = 0,$$

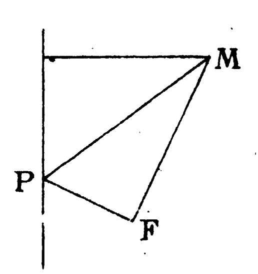
il faut et il suffit que les points corrélatifs de cette droite soient conjugués par rapport à la conique corrélative, c'est-à-dire que l'on ait

$$u_1\psi'_{u_2} + v_1\psi'_{v_2} + r_1\psi'_{r_2} = 0.$$

Poursuivant notre traduction, nous obtenons une propriété caractéristique des droites conjuguées :

Si A reste fixe, ses conjugués sont situés sur sa polaire.	Si une droite reste fixe, toutes les droites conjuguées passent par son pôle.
Si deux points sont conjugués, la polaire de chacun d'eux passe par l'autre, et inversement.	Si deux droites sont conjuguées, le pôle de chacune d'elles est sur l'autre, et inversement.

APPLICATION. — Deux droites conjuguées issues d'un foyer sont rectangulaires, puisqu'elles forment un faisceau harmonique avec les droites isotropes. En outre, le pôle de l'une est à l'intersection de l'autre avec la directrice; cette remarque fournit une construction de la tangente à une conique donnée par son foyer et sa directrice ; la tangente en M coupe cette droite en un point P tel que FP soit perpendiculaire à FM.



185. Nouveau mode de définition tangentielle des coniques. — Au n° 118, nous avons indiqué, en nous plaçant au point de vue ponctuel, un mode de génération commun à toutes les courbes du second ordre, en établissant que :

Le lieu des points de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets A *et* B *est une conique passant par* A *et* B. Il y a décomposition si le rayon AB se correspond à lui-même, et le lieu comprend alors AB et une autre droite.

Transformons ce résultat par corrélation. Nous en déduisons le suivant :

L'enveloppe de la droite qui joint deux points homologues sur deux divisions homographiques dont les bases sont deux droites (α) *et* (β) *d'un même plan est une conique tangente à* (α) *et* (β). Il y a exception si le point de rencontre de ces droites est son propre homologue, auquel cas la droite joignant deux points correspondants passe par un point fixe.

Lorsque la correspondance entre les points précédents est linéaire, si l'un des points s'éloigne indéfiniment, l'autre fait de même. La courbe est tangente à la droite de l'infini : c'est donc une parabole.

186. Interprétation de la corrélation. Polaires réciproques. — La relation

$$x_1x_2 + y_1y_2 + t_1t_2 = 0$$

exprime la condition pour que les points (x_1, y_1, t_1) et (x_2, y_2, t_2) soient conjugués par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 + t^2 = 0\,;$$

donc si l'on prend le point (u, v, r), sa polaire par rapport à ce cercle est la droite

$$ux + vy + rt = 0,$$

c'est-à-dire justement la droite corrélative.

D'une manière plus générale, on dit que l'on fait une transformation par polaires réciproques, lorsqu'à chaque point d'une figure F on fait correspondre sa polaire par rapport à une conique indécomposée, qu'on nomme la *conique directrice*. Les caractères généraux d'une telle transformation sont les mêmes que ceux d'une corrélation. Par exemple, si un point M décrit une courbe C, sa polaire enveloppe une courbe Γ, et le point de contact de cette droite avec Γ n'est autre que le pôle de la tangente en M à la courbe C.

L'avantage de la généralisation ainsi opérée est le suivant :

Si dans un plan deux figures se correspondent par polaires réciproques, les figures qu'on en déduit par une transformation homographique possèdent la même propriété, la conique directrice étant la transformée de celle qui servait de base à la correspondance des deux premières figures. Il est clair, par contre, que si deux figures sont corrélatives, celles qu'on en déduit par transformation homographique ne le sont pas : il y a entre elles une correspondance par polaires réciproques par rapport à la conique transformée du cercle

$$x^2 + y^2 + t^2 = 0.$$

Ainsi, au point de vue projectif, c'est la transformation par polaires réciproques, et non la corrélation, qu'il convient d'envisager.

Il est clair qu'un théorème projectif, transformé par polaires réciproques, donne naissance à un théorème projectif.

VIII. — Normales aux coniques.

187. Nous terminerons ce chapitre par l'étude d'une question de géométrie métrique : la détermination des normales aux coniques. En même temps, nous construirons les développées de ces courbes.

Cas de l'ellipse. — Nous supposerons $a > b$ et nous utiliserons la représentation paramétrique

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

La normale au point de paramètre φ sera

$$\frac{aX}{\cos\varphi} - \frac{bY}{\sin\varphi} - c^2 = 0. \qquad (c^2 = a^2 - b^2)$$

Pour que la droite

$$uX + vY + w = 0$$

soit normale à l'ellipse, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{a}{u\cos\varphi} = -\frac{b}{v\sin\varphi} = -\frac{c^2}{w};$$

éliminons $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Nous obtenons l'équation tangentielle de la développée, qui est

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = \frac{c^4}{w^2},$$

ou

$$w^2(a^2v^2 + b^2u^2) = c^4u^2v^2.$$

L'équation ponctuelle s'obtient en éliminant φ entre l'équation de la normale et l'équation dérivée par rapport à φ. Écrivons ces équations sous la forme

$$aX\sin\varphi - bY\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$aX\cos\varphi + bY\sin\varphi = c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

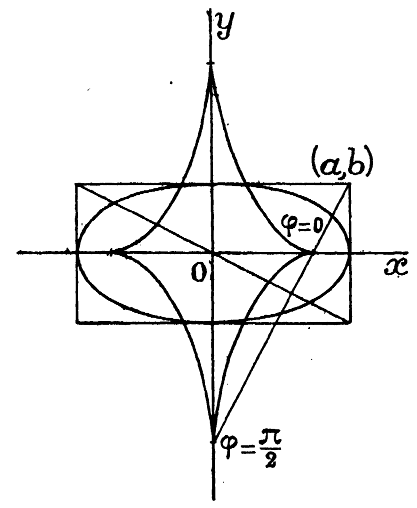
On tire de ces équations

$$aX = c^2 \cos^3 \varphi, \qquad bY = -c^2 \sin^3 \varphi;$$

la développée est donc une courbe unicursale (posez $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$) ayant pour équation ponctuelle

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de construire cette courbe, qui présente quatre points de rebroussement sur les axes de l'ellipse. Il vérifiera que, parmi ces quatre points, ceux qui correspondent à $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sont alignés avec le sommet (a, b) du rectangle R circonscrit à l'ellipse, la droite qui les porte étant perpendiculaire à la diagonale du rectangle qui ne contient pas ce sommet (¹).



Remarquons que cette courbe se déduit de celle qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

en amplifiant les ordonnées dans le rapport $\frac{a}{b}$. Cette dernière courbe peut être regardée comme l'enveloppe d'une droite,

$$X \sin \varphi - Y \cos \varphi = \frac{c^2}{a} \sin \varphi \cos \varphi,$$

(¹) Cette propriété peut être rattachée à l'énoncé suivant :

Associons les points de même abscisse sur notre ellipse et l'une des diagonales du rectangle R. En ces points les sous-normales de ces deux lignes sont opposées.

L'élève cherchera comment il faut modifier cet énoncé dans le cas de l'hyperbole, en considérant, à la place de la diagonale de R, qui cesse d'exister, une asymptote de la courbe.

qui se déplace de manière que la distance de ses points d'intersection avec les axes demeure constante ; l'élève fera cette vérification.

188. Nombre des normales réelles issues d'un point (α, β). — Le point d'incidence (x, y) d'une de ces normales est à l'intersection de l'ellipse et de la courbe

$$\frac{\alpha - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta - y}{\frac{y}{b^2}},$$

dont l'équation s'écrit encore

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère (hyperbole d'Apollonius), ayant les axes pour directions asymptotiques, passant par le centre et le point (α, β). Elle a toujours au moins deux points réels communs avec l'ellipse. Il y aura donc, suivant les cas, deux ou quatre normales réelles. Pour faire cette distinction, unicursalisons l'hyperbole d'Apollonius, en prenant pour paramètre t la valeur commune des rapports qui figurent dans la première forme de son équation. Il vient

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + t}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 + t};$$

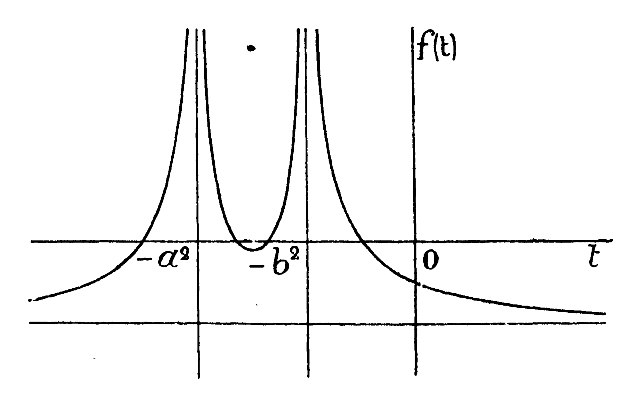
les t des points communs à l'ellipse et l'hyperbole sont les racines de l'équation

$$f(t) = \frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + t)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + t)^2} - 1 = 0.$$

Construisons la courbe représentative de $f(t)$: elle est asymptote aux droites $t = -a^2$ et $t = -b^2$, les branches infinies correspondantes étant au-dessus de Ot ; en outre, elle est asymptote à la droite d'ordonnée -1. Il y a donc toujours une racine inférieure à $-a^2$ et une racine qui surpasse $-b^2$. Entre $-a^2$ et $-b^2$, $f(t)$ passe par un minimum. Pour que les quatre normales soient réelles, il faut et il suffit que ce minimum soit négatif. Or la

valeur de t qui correspond à ce minimum est racine de la dérivée. On a, en l'annulant,

$$-\frac{1}{2}f'(t) = \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+t)^3} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+t)^3} = 0.$$



La racine de cette équation satisfait aussi aux proportions

$$\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{a^2+t} = -\frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{b^2+t} = \frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}}}{c^2}.$$

Donc, la valeur correspondante de $f(t)$ s'écrit

$$f(t) = \left(\frac{a\alpha}{a^2+t}\right)^2 + \left(\frac{b\beta}{b^2+t}\right)^2 - 1$$

$$= (a\alpha)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{a^2+t}\right]^2 + (b\beta)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{b^2+t}\right]^2 - 1,$$

ce qui montre que $f(t)$ est du signe de

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}}.$$

Pour que les quatre normales soient réelles, il faut et il suffit que cette quantité soit négative, c'est-à-dire que le point (α, β) soit intérieur à la développée.

189. Cas de l'hyperbole. — Les méthodes sont les mêmes que pour l'ellipse. Il convient toutefois de remarquer que si l'on veut une représentation paramétrique de la courbe, en posant

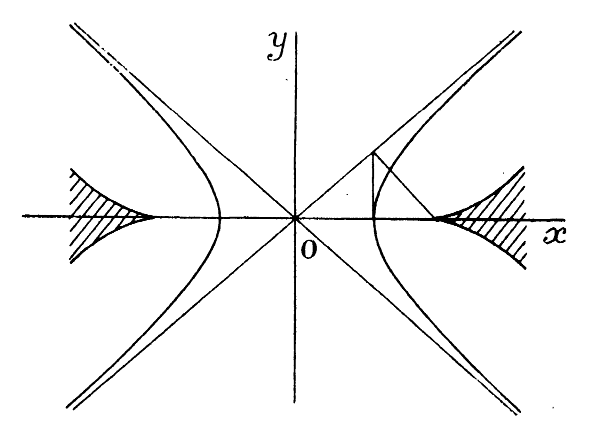
$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{sh} \varphi,$$

on ne représente qu'une des branches, celle de droite si a est positif. Dans cette hypothèse, pour représenter celle de gauche, il suffit de poser

$$x = -a \operatorname{ch} \varphi, \qquad y = b \operatorname{sh} \varphi.$$

Mais il n'est pas besoin de reprendre tous les calculs. Dans les résultats relatifs aux normales à l'ellipse, il suffit de changer b^2 en $-b^2$. Ainsi, la développée d'une hyperbole a pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$



en posant

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

L'élève reprendra, comme exercice, la discussion du nombre des normales réelles issues d'un point (α, β) ; il y en a quatre quand ce point est intérieur à l'un des rebroussements de la développée (régions ombrées), deux dans l'autre région.

190. Cas de la parabole. — Soit la parabole

$$y^2 - 2px = 0.$$

La normale au point (x, y) est

$$yX + pY - y(x + p) = 0.$$

Cherchons la normale de coefficient angulaire m. En vertu de

l'équation précédente, nous avons

$$m = -\frac{y}{p}.$$

Par suite, les coordonnées du point d'incidence s'expriment, en fonction de m, par les formules

$$y = -pm, \qquad x = \frac{y^2}{2p} = \frac{pm^2}{2}.$$

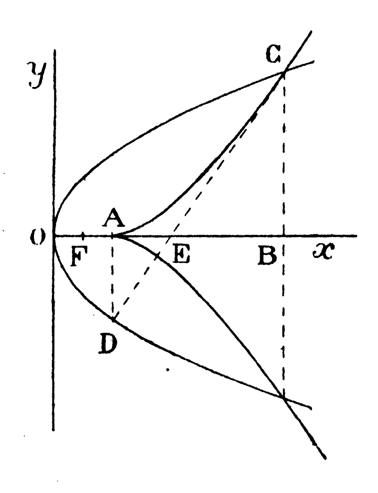
La normale cherchée est donc

$$Y = m(X - p) - \frac{pm^3}{2}.$$

Cette équation définit, lorsque X et Y sont donnés, les coefficients angulaires des normales à la parabole menées du point (X, Y); il y a donc une ou trois de ces normales qui sont réelles. Elles le seront toutes trois, si l'on a

$$8(p - X)^3 + 27pY^2 < 0.$$

La courbe obtenue en annulant le premier membre est la développée de la parabole. C'est une courbe du troisième ordre, qui admet le point $(p, 0)$ comme point de rebroussement. Les normales menées d'un point sont toutes réelles quand ce point se trouve dans la région intérieure au rebroussement.



En appelant B la projection sur Ox des points de rencontre de la parabole avec sa développée, il est facile de montrer que

$$\overline{OB} = 4\overline{OA} = 4p.$$

En effet, la somme des coefficients angulaires, et par suite celle des ordonnées des normales menées d'un point, est nulle. Appliquant cela au point D, on en conclut que son ordonnée est la moitié de celle de C; donc l'abscisse de A est le quart de $\overline{OB}$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la sous-normale AE est égale à p, pour obtenir le résultat annoncé.

CHAPITRE XI

SURFACES DU SECOND ORDRE OU QUADRIQUES

I. — Nature géométrique des surfaces représentées par une équation du second degré. Génératrices rectilignes et sections circulaires.

191. Cas où la surface possède un ou plusieurs points singuliers. — L'équation générale des surfaces du second ordre, en coordonnées homogènes, est

$$f(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2 = 0.$$

Nous avons vu (n° 74) qu'une quadrique qui a un seul point d'ordre deux est un cône. C'est là aussi (n° 139) la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit développable. Elle équivaut au fait que les quatre plans

$$\frac{1}{2}f'_x = Ax + B''y + B'z + Ct = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_y = B''x + A'y + Bz + C't = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_z = B'x + By + A''z + C''t = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_t = Cx + C'y + C''z + Dt = 0$$

ont un point commun et un seul.

Si une quadrique a deux points d'ordre deux, elle se décompose en deux plans. Les plans définis par les quatre équations précédentes ont alors en commun une droite ; ils peuvent même se confondre et alors la quadrique se réduit à un plan double.

192. Nature géométrique d'une surface indécomposée du second ordre. — Nous allons aborder le problème de la classification des quadriques : nous diviserons ces surfaces en plusieurs catégories, celles d'une même catégorie étant susceptibles d'une définition géométrique commune. Pour établir cette classification, nous prendrons pour point de départ le caractère de la conique déterminée par la surface dans le plan de l'infini. Cette conique a pour équations

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad t = 0.$$

En posant

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

la conique à l'infini de la surface est encore représentée par

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad t = 0.$$

Autrement dit, on peut la considérer comme l'intersection du plan de l'infini avec le cône $\varphi = 0$. A ce cône, on donne le nom de *cône directeur* de la surface. Notre classification sera basée sur la considération de ce cône. Le fait, pour une quadrique, d'appartenir à l'un des types que nous allons mettre en évidence, constituera une propriété linéaire de cette surface, car elle se ramène à une propriété projective de l'ensemble formé par la quadrique et le plan de l'infini. Bien entendu, nous supposons tous les coefficients réels. Le plan de l'infini ayant un rôle spécial, nous ferons, dans les calculs, $t = 1$.

193. Premier cas : la conique à l'infini se décompose. — Le cône directeur est lui-même décomposé, soit en un plan double, soit en deux plans distincts, suivant que la conique à l'infini de la surface se réduit à une droite double ou à un système de

deux droites distinctes. Étudions successivement ces deux alternatives.

Théorème. — *Une quadrique non décomposée dont le cône directeur se réduit à un plan double est un cylindre parabolique.*

Pour démontrer ce théorème et tous ceux qui suivront, nous supposerons que tous les systèmes d'axes auxiliaires dont nous ferons usage sont trirectangles. Cela posé, prenons le plan y_1Oz_1 d'un nouveau système, parallèle au plan double. L'équation de la surface devient alors

$$x_1^2 + 2C_1x_1 + 2C'y_1 + 2C''z_1 + D_1 = 0\,;$$

en faisant tourner Oy_1 et Oz_1 autour de Ox_1, on peut faire disparaître le terme en z et se ramener à une équation de la forme

$$x_1^2 + 2C_1x_1 + 2C'''Y + D_1 = 0,$$

qui représente un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan x_1OY, et dont la section droite dans ce plan est une parabole. En la rapportant, par translation, à son axe et à sa tangente au sommet, on réduit en définitive l'équation de la surface à la forme

$$Y_1^2 - 2pX_1 = 0.$$

Toute section plane de cette surface dont le plan n'est pas parallèle aux génératrices est une parabole (n° 174). On lui donne le nom de *cylindre parabolique.*

Théorème. — *Une quadrique non décomposée dont le cône directeur se réduit à deux plans distincts est un paraboloïde ou un cylindre à centres.*

Les deux plans de décomposition du cône directeur peuvent être réels ou imaginaires conjugués. Leur intersection est réelle; prenons un nouveau système d'axes $O_1x_1y_1z_1$ tel que O_1z_1 soit parallèle à cette intersection, et que les plans $x_1O_1z_1$ et $y_1O_1z_1$ se confondent avec les bissecteurs, toujours réels, des plans de décomposition ou *plans directeurs.* Notre équation devient

$$\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 + 2C_1''z_1 + D_1 = 0,$$

α et β étant tous deux différents de zéro. Si $C_1'' = 0$, nous sommes en présence d'un cylindre, dont les sections sont des ellipses si α et β sont de même signe, des hyperboles si α et β sont de signes contraires. On dit que le cylindre est *elliptique* dans le premier cas, *hyperbolique* dans le second.

Si C_1'' n'est pas nul, notre équation peut être résolue par rapport à z_1,

$$z_1 = ax_1^2 + by_1^2 + 2cx_1 + 2c'y_1 + d,$$

ce qui s'écrit encore

$$z = a\left(x_1 + \frac{c}{a}\right)^2 + b\left(y_1 + \frac{c'}{b}\right)^2 + d_1;$$

en faisant une translation d'axes

$$x_1 + \frac{c}{a} = X, \qquad y_1 + \frac{c'}{b} = Y, \qquad z - d_1 = Z,$$

nous obtenons finalement l'équation

$$Z = aX^2 + bY^2.$$

La surface qu'elle représente est symétrique par rapport aux plans XOZ et YOZ. Tout plan parallèle à l'un de ces plans la coupe suivant une parabole, dont le paramètre demeure constant quand ce plan varie. Avec plus de précision, on voit qu'on peut engendrer la surface :

1° ou bien par la translation d'une parabole, dont le sommet décrit la parabole

$$\text{(P)} \qquad X = 0, \qquad Z = bY^2,$$

la position initiale de la première étant

$$\text{(Q)} \qquad Y = 0, \qquad Z = aX^2;$$

2° ou bien par la translation d'une parabole, dont la position initiale se confond avec la parabole P et dont le sommet décrit la parabole Q.

La surface est appelée un *paraboloïde,* et les paraboles P et Q sont ses paraboles principales.

Si a et b sont de même signe, les plans directeurs sont imaginaires conjugués. En outre, Z a un signe constant. Toutes les paraboles sections de la surface par des plans contenant OZ sont d'un même côté du plan XOY tangent en O. Toute section non parallèle à OZ est une ellipse. La surface prend le nom de *paraboloïde elliptique*. Par une réduction d'ordonnées dans un rapport constant, on la déduit de la surface

$$Z = a(X^2 + Y^2),$$

c'est-à-dire de la surface de révolution engendrée par une parabole tournant autour de son axe (*paraboloïde de révolution*).

Si a et b sont de signes contraires, les plans directeurs sont réels. Toute section déterminée par un plan non parallèle à OZ est donc une hyperbole. La surface prend le nom de *paraboloïde hyperbolique*. Un plan sécant passant par OZ donne, suivant son orientation par rapport aux plans directeurs, une parabole située au-dessus ou au-dessous du plan tangent XOY. Cette parabole se réduit à une droite perpendiculaire à OZ, quand le plan se confond avec un des plans directeurs.

Remarque. — Un plan tangent à un paraboloïde elliptique le coupe (n° 139) suivant deux droites, qui, ayant leurs points à l'infini imaginaires, le sont elles-mêmes. Donc pas de droites réelles sur cette surface. Par contre, un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique le coupe suivant deux droites réelles, parallèles à ses plans directeurs. Donc par chaque point d'une telle surface passent deux génératrices rectilignes réelles. Numérotons les plans directeurs et convenons que les génératrices parallèles à l'un d'eux forment le système de même numéro. Tout plan passant par une génératrice (1) coupe la surface suivant une génératrice (2). Donc deux génératrices de même système ne sont jamais dans un même plan. Cela posé, prenons, dans le premier système, deux génératrices G_1 et G'_1. Un plan variable P passant par G_1 coupe la surface suivant une génératrice Γ_2, qui passe par le point de rencontre de P et de G'_1. Finale-

ment, on peut dire que la surface est le lieu de la droite Γ_2, qui s'appuie sur G_1 et G'_1, et qui reste parallèle au plan directeur (2). Cette propriété constitue le point de départ de l'étude du paraboloïde hyperbolique en géométrie descriptive.

194. Deuxième cas : la conique à l'infini est indécomposée. — Le cône directeur est lui-même indécomposé. Nous aurons à distinguer deux cas, suivant qu'il est réel ou imaginaire. Mais, dans les deux cas, nous pourrons simplifier l'équation de la quadrique au moyen du théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque le cône directeur ne se décompose pas, la quadrique possède un centre de symétrie et un seul.*

En effet, en raisonnant comme pour les coniques, on obtient le résultat suivant : pour que l'origine soit centre, il faut et il suffit que l'équation de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

en coordonnées non homogènes, manque de termes du premier degré. Donc, pour que le point (u, v, w) soit centre, il faut et il suffit que l'équation

$$f(u + X, v + Y, w + Z) = 0$$

manque de termes du premier degré en X, Y, Z, c'est-à-dire que l'on ait simultanément

$$\frac{1}{2} f'_u = Au + B''v + B'w + C = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\varphi'_u + C = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_v = B''u + A'v + Bw + C' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\varphi'_v + C' = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_w = B'u + Bv + A''w + C'' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\varphi'_w + C'' = 0;$$

par hypothèse le cône directeur est indécomposé, donc il n'existe (n° 160) aucun système de nombres u, v, w non tous nuls, annulant simultanément les trois formes linéaires φ'_u, φ'_v, φ'_w. Autrement dit, les plans

$$\varphi'_u = 0, \qquad \varphi'_v = 0, \qquad \varphi'_w = 0$$

n'ont en commun que l'origine et forment un véritable trièdre. Par suite, il en est de même des plans

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0,$$

qui leur sont respectivement parallèles. Leur point commun, unique, est le centre annoncé. (C. q. f. d.)

195. En prenant ce point pour origine O, l'équation de la surface se réduit à

$$\varphi(x, y, z) = \lambda.$$

Si λ est nul, nous avons un cône de sommet O ; il sera entièrement défini si l'on connaît une de ses sections planes. Si l'une de celles-ci est une ellipse imaginaire, toutes les génératrices sont imaginaires, et de même toutes les sections. Le cône est imaginaire : la fonction $\varphi(x, y, z)$ a un signe constant dans tout l'espace. Elle ne s'annule qu'en O, où elle présente un maximum ou un minimum.

Lorsque le cône admet une section réelle, il est lui-même réel. Un plan parallèle à un plan tangent le coupe suivant une conique admettant la direction de la génératrice de contact comme direction asymptotique double, c'est-à-dire suivant une parabole P. Dans le plan de la section, la fonction $\varphi(x, y, z)$ est d'un certain signe à l'intérieur de la parabole, du signe contraire à l'extérieur. Or, en tous les points d'une droite issue de O, la fonction φ, homogène et du second degré, possède un signe constant : elle a donc le même signe sur toutes les droites issues de O et coupant la parabole à son intérieur. L'ensemble de ces droites constitue, par définition, la région intérieure au cône. Tout plan passant par l'une d'elles coupe le cône suivant deux droites réelles. Un plan Q, passant par le sommet, coupe le plan de la parabole P suivant une droite Δ. Si Δ est extérieure à P, le plan Q n'a en commun avec le cône d'autre point réel que O ; un plan parallèle à Q coupe le cône suivant une ellipse. Si Δ coupe P, le plan Q coupe le cône suivant deux génératrices réelles ; un plan parallèle le coupe suivant une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices.

Nous allons maintenant établir un théorème fondamental :

Théorème. — *Toute quadrique dont le cône directeur est indécomposé admet au moins un système de trois plans de symétrie, deux à deux rectangulaires.*

Soit la quadrique

$$\varphi(x, y, z) = \lambda,$$

ayant son centre à l'origine. Si l'équation $\varphi = 0$ représente un cône imaginaire, nous donnerons à λ une valeur du signe de φ, de manière à obtenir une quadrique réelle. Cela posé, admettons l'existence d'un rayon vecteur issu de O et normal à la quadrique. Il sera établi plus loin [1] qu'il en existe toujours un, indépendamment du raisonnement qui va suivre.

Prenons-le pour axe Oz_1 dans un nouveau système de coordonnées. A l'extrémité $(0, 0, c)$ de notre rayon vecteur, le plan tangent est perpendiculaire à Oz_1. Donc la nouvelle équation de la surface ne contient pas de terme en z_1x_1 ou z_1y_1 ; elle est donc de la forme

$$A_1x_1^2 + A'_1y_1^2 + A''_1z_1^2 + 2B''_1x_1y_1 = \lambda.$$

Faisons tourner les axes autour de Oz_1, de manière à amener les plans Ox_1z_1 et Oy_1z_1 en coïncidence avec les bissecteurs OXz_1 et OYz_1 du système des deux plans

$$A_1x_1^2 + A'_1y_1^2 + 2B''_1x_1y_1 = 0.$$

Par rapport au nouveau trièdre OXYZ, l'équation de la surface s'écrira

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \lambda. \qquad (z_1 = Z)$$

Remarque. — La direction des plans de symétrie est indépendante de λ ; par suite, la forme de réduction précédente s'applique tout aussi bien à un cône, ou à une quadrique imaginaire,

---

[1] L'élève débutant peut se contenter de raisonner comme suit : il est facile d'admettre que la distance du centre à un point de la quadrique possède un minimum. Au point correspondant, le rayon vecteur est petit axe ou axe transverse de chaque conique, dont le plan le contient ; il est donc perpendiculaire au plan tangent à son extrémité.

qui serait obtenue en égalant le premier membre de l'équation d'un cône imaginaire à une constante de signe différent.

196. Les trois espèces de quadriques à centre unique. — En vertu de la théorie précédente, un choix convenable des axes ramène l'équation de la quadrique à la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1,$$

en supposant qu'elle ne se réduise pas à un cône. Supposons d'abord que le cône directeur soit imaginaire. Si α, β, γ sont tous trois négatifs, la surface n'a aucun point réel. On lui donne le nom d'*ellipsoïde imaginaire*. Si α, β, γ sont tous trois positifs, on peut donner à l'équation précédente la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On dit qu'elle représente un *ellipsoïde réel*. Cette surface se déduit par une modification des ordonnées, dans un rapport constant, de la suivante

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

engendrée par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes. Ainsi, un ellipsoïde quelconque se déduit de l'ellipsoïde de révolution en modifiant dans un rapport constant toutes les ordonnées de ce dernier, par rapport à un de ses plans méridiens.

La sphère est un cas particulier de l'ellipsoïde. Pour qu'une quadrique, dont on donne l'équation non réduite, soit une sphère, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du second degré, dans son équation, soit proportionnel à $x^2 + y^2 + z^2$, ou encore que la quadrique passe par le cercle imaginaire de l'infini.

Supposons maintenant que le cône directeur soit réel : alors α, β, γ ne sont pas tous de même signe ; disposons des notations de manière que, parmi ces coefficients, α et β soient ceux qui ont un signe commun. Nous obtenons deux types de surfaces

$$(H_1) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad \text{et} \quad (H_2) \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Toute section d'une de ces surfaces par un plan passant par O a pour asymptotes les génératrices d'intersection de ce plan et du cône

$$\text{(C)} \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Il s'ensuit qu'en s'éloignant indéfiniment sur H_1 ou H_2, on fait tendre vers zéro la distance d'un point de ces surfaces au cône C, qu'on appelle pour cette raison *cône asymptote*. Choisir, comme nous l'avons fait, des notations telles que les coefficients α et β soient de même signe, revient à appeler OZ, parmi les trois axes de symétrie, celui qui est à l'intérieur du cône C.

Étudions maintenant les surfaces H_1 et H_2. Comme dans le cas de l'ellipsoïde, nous pouvons les faire dériver de surfaces de révolution, en modifiant, dans un rapport constant, les ordonnées d'un point de ces dernières par rapport à un plan méridien. La surface H_1 se déduit par ce procédé de l'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

engendré (voyez n° 102) par une hyperbole tournant autour de son axe non transverse. On donne donc à H_1 le nom d'*hyperboloïde à une nappe,* et à H_2, qui se déduit de même d'une surface de révolution engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe transverse, celui d'*hyperboloïde à deux nappes.*

L'hyperboloïde à deux nappes n'a pas de génératrices rectilignes réelles lorsqu'il est de révolution (puisqu'une droite tournant autour d'un axe engendre (n° 102) un hyperboloïde à une nappe). Il n'en a donc dans aucun cas. Par contre, nous avons vu que l'hyperboloïde de révolution à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes réelles. Des considérations géométriques élémentaires permettent d'en apercevoir les propriétés fondamentales :

1° Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan ;

2° Deux génératrices de systèmes différents sont dans un plan tangent à la surface.

Ces propriétés s'étendent à tout hyperboloïde à une nappe, d'après la manière même dont cette surface se déduit de la surface gauche de révolution. Notons encore que l'on n'y peut trouver trois génératrices parallèles à un même plan, puisque le cône directeur est indécomposé.

197. Existence d'un rayon central normal. — Le problème de la classification des quadriques est donc résolu. Toutefois, pour que les résultats du n° 196 soient établis en toute rigueur, c'est-à-dire pour que les ellipsoïdes et les hyperboloïdes constituent les seules espèces de quadriques à centre unique autres que des cônes, il faut rechercher si, étant donnée la surface représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = \lambda,$$

qui admet pour seul centre le point O, il existe un rayon vecteur issu de ce point et normal à la surface.

Si ce rayon vecteur existe, la sphère de centre O dont il est le rayon coupe la quadrique considérée Q suivant une courbe qui a deux points d'ordre deux, symétriques par rapport à O. Or cette intersection de la quadrique Q et de la sphère concentrique S,

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0,$$

est la même que l'intersection de S et du cône de sommet O représenté par

$$(\Gamma) \qquad \varphi(x, y, z) - \frac{\lambda}{\rho^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Si le rayon ρ de la sphère S a été choisi de manière qu'elle soit doublement tangente à la quadrique Q, le cône Γ devra avoir une génératrice d'ordre deux, et par suite se décomposer. Inversement, si Γ se décompose en deux plans réels ou imaginaires conjugués, leur intersection portera un rayon vecteur (d'extrémité réelle ou imaginaire, peu importe), normal à Q. L'équation du cône Γ est de la forme

$$\psi(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Pour qu'il se décompose, il faut et il suffit que les trois plans

$$\frac{1}{2}\psi'_x = (A - S)x + B''y + B'z = 0,$$

$$\frac{1}{2}\psi'_y = B''x + (A' - S)y + Bz = 0,$$

$$\frac{1}{2}\psi'_z = B'x + By + (A'' - S)z = 0$$

aient une droite commune ou se confondent. Cherchons les valeurs de S qui réalisent cette condition. Exprimons en fonction d'un paramètre les coordonnées d'un point de la droite commune aux deux premiers plans :

$$\begin{aligned} x &= [BB'' - B'(A' - S)]\lambda, \\ y &= [B'B'' - B(A - S)]\lambda, \\ z &= [(A - S)(A' - S) - B''^2]\lambda. \end{aligned}$$

Puis, exprimons que cette droite est située dans le troisième. Nous obtenons la condition

$$(A - S)(A' - S)(A'' - S) \\ - B^2(A - S) - B'^2(A' - S) - B''^2(A'' - S) + 2BB'B'' = 0,$$

qui est une équation du troisième degré en S à coefficients réels. Donc, *a priori,* nous sommes sûrs qu'elle a au moins une racine réelle S_1. Pour cette valeur de S, nos trois plans $\psi'_x = 0$, $\psi'_y = 0$, $\psi'_z = 0$ ne peuvent former un trièdre. Donc si la quantité

$$\varphi(x, y, z) - S_1(x^2 + y^2 + z^2)$$

n'est pas identiquement nulle, c'est-à-dire si la quadrique Q n'est pas une sphère, on peut la mettre sous forme d'un produit de deux facteurs linéaires, réels ou imaginaires conjugués, distincts ou non. Dans les deux cas, les plans où ils s'annulent ont en commun au moins une droite réelle issue de O. Faisons un changement de coordonnées en prenant, dans le nouveau système, cette droite pour axe Oz_1. La forme $\varphi(x, y, z)$ se transformera en une autre $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$, et comme $x^2 + y^2 + z^2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, nous aurons une identité telle que

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = S_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + Rx_1^2 + 2Mx_1y_1 + Ty_1^2.$$

Ainsi dans la nouvelle équation de la quadrique ne figurent pas de termes en x_1z_1 et y_1z_1, ou encore, les plans tangents aux points situés sur Oz_1 sont perpendiculaires à cette droite. C'est bien à la possibilité de déterminer une telle droite que nous voulions parvenir.

198. Signification géométrique des racines de l'équation en S. — Soit la quadrique

$$\varphi(x, y, z) = 1,$$

dont le cône directeur est indécomposé. Par un changement d'axes conservant l'origine, ramenons-la à la forme

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

A, B, C représentant, dans le cas de l'ellipsoïde réel, les carrés des longueurs des axes. Dans tous les cas, nous les appellerons carrés des longueurs des axes de la surface. Cela posé, nous avons l'identité

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv \frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} - S(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Le cône sur lequel s'annule l'un des deux membres se décompose pour les trois valeurs suivantes de S :

$$S_1 = \frac{1}{A}, \qquad S_2 = \frac{1}{B}, \qquad S_3 = \frac{1}{C}.$$

Donc *l'équation en* S *a ses trois racines réelles ; elles représentent les inverses des carrés des axes de la quadrique*

$$\varphi(x, y, z) = 1.$$

Pour que cette surface soit de révolution, il faut et il suffit que l'équation en S ait une racine double ; pour qu'elle soit une sphère, que l'équation en S admette une racine triple.

Des considérations géométriques évidentes nous montrent que la sphère admet pour trièdre de symétrie tout trièdre trirectangle ayant pour sommet son centre. Nous voyons de même que les

quadriques de révolution (à centre unique) admettent comme trièdres de symétrie tous ceux qui ont pour sommet le centre et dont une arête se confond avec l'axe de la surface. Montrons qu'une quadrique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont distincts, possède un trièdre de symétrie unique. Il suffit d'établir qu'un rayon vecteur différent de l'un des axes n'est pas normal à cette surface ; considérons celui qui joint le centre au point (x, y, z). La normale en ce point a pour paramètres directeurs

$$\frac{x}{A}, \quad \frac{y}{B}, \quad \frac{z}{C}.$$

On écrit que sa direction se confond avec la direction (x, y, z) et un raisonnement bien simple fournit le résultat.

Remarque. — Considérons encore la surface Q définie par

$$\varphi(x, y, z) = 1,$$

mais en supposant cette fois que le cône directeur

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

se décompose en deux plans. Nous pouvons encore chercher à quelle condition une sphère

$$S(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

concentrique à la quadrique Q, lui sera tangente, et nous serons conduits, en développant les calculs, à la même équation que précédemment. Celle-ci exprime que la forme

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

équivaut au produit de deux facteurs linéaires. Donc l'équation en S admet, dans l'hypothèse actuelle, au moins une racine nulle. Pour parachever cette étude, examinons d'abord le cas où le cône directeur se décompose en deux plans distincts

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0.$$

La quadrique Q représentée par

$$P_1P_2 = 1$$

est un cylindre à centres. Le lecteur établira que deux de ses racines sont les inverses des carrés des axes de sa section droite; la troisième est nulle.

Si le cône directeur se réduit à un plan double, la quadrique Q a une équation de la forme $P^2 = 1$. Elle se réduit à un système de deux plans parallèles, symétriques par rapport à l'origine. L'équation en S n'a alors qu'une seule racine non nulle : elle représente l'inverse du carré de la distance de l'origine à l'un de ces plans.

Considérons une quadrique à cône directeur quelconque, décomposé ou non. Nous sommes maintenant à même de dire à quelle condition elle est *de révolution* : il faut et il suffit que l'équation en S ait *une racine double non nulle.*

199. Sections circulaires réelles des quadriques. — Présentons d'abord une remarque importante pour la suite : les sections d'une quadrique par deux plans parallèles ont mêmes points à l'infini, à savoir ceux des génératrices du cône directeur qui sont parallèles à ces plans. Ces coniques sont donc homothétiques (n° 165). Pour une même raison, on obtient encore des coniques homothétiques en coupant par des plans parallèles deux quadriques dont le cône directeur est le même. Si donc un plan coupe une quadrique suivant un cercle, tous ceux qui lui sont parallèles coupent suivant des cercles cette quadrique ou celles qui ont le même cône directeur.

Parmi les cylindres, le cylindre elliptique admet seul des sections circulaires réelles. Les cercles situés sur la surface sont aussi sur des sphères ayant pour diamètre un axe de section droite : celles qui ont pour diamètre un petit axe donnent deux cercles imaginaires, celles qui ont pour diamètre un grand axe fournissent deux cercles réels. Il y a donc sur le cylindre elliptique deux familles de sections circulaires réelles : leurs directions sont symétriques par rapport à celle des sections droites et sont parallèles aux grands axes de ces dernières.

Parmi les paraboloïdes, le paraboloïde elliptique nous donne seul des sections circulaires réelles. D'après la remarque précédente, le paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

a mêmes directions de sections circulaires que le cylindre

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2a,$$

qui a pour section droite une section du paraboloïde par un plan perpendiculaire à son axe. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Prenons maintenant le cas d'une quadrique à centre

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0.$$

D'après notre remarque du début, nous pouvons chercher seulement les sections circulaires dont le plan contient le centre. L'une d'elles est située sur une sphère concentrique à la quadrique : cette sphère, ayant en commun avec la quadrique un premier cercle, en a nécessairement un second. Donc les sections circulaires centrales s'obtiennent en coupant la surface par une sphère concentrique, de manière que l'intersection se décompose. Si, comme nous le supposons, A, B, C sont distincts, il y a trois sphères répondant à la question. Les carrés de leurs rayons sont A, B, C.

Dans le cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad (a>b>c)$$

ces trois sphères sont réelles, mais les deux sphères extrêmes sont l'une intérieure, l'autre extérieure à la surface, et ne donnent pas de sections réelles. Il n'y a donc que deux sections circulaires réelles, dont les plans passent par le centre : elles se croisent aux extrémités de l'axe moyen.

Pour l'hyperboloïde à une nappe,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad (a>b),$$

la sphère de rayon b est intérieure à la surface. Seule la sphère de rayon a fournit des sections circulaires réelles.

L'hyperboloïde à deux nappes ne peut avoir de section réelle passant par le centre autre qu'une hyperbole. Mais il n'est pas besoin, pour obtenir les sections circulaires de cette surface, d'un raisonnement nouveau. D'après la remarque du début, les sections par un même plan des deux hyperboloïdes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

et de leur cône asymptote sont homothétiques. Donc un cône réel du second ordre ou un hyperboloïde à deux nappes admettent, comme l'hyperboloïde à une nappe, deux directions de sections circulaires réelles.

Il en est ainsi de toutes les quadriques, exception faite des paraboloïdes hyperboliques et des cylindres paraboliques ou hyperboliques. Les cercles réels situés sur une quadrique (s'ils existent) se subdivisent en deux familles. Comme exercice, nous demandons à l'élève de prouver que deux cercles de familles différentes sont sur une même sphère, alors que deux cercles d'une même famille n'y sont jamais.

200. Représentation paramétrique d'une quadrique. — On dit qu'une surface algébrique est *unicursale* si l'on peut exprimer les coordonnées x, y, z d'un de ses points en fonctions rationnelles de deux paramètres u et v. Si cette représentation est telle qu'à chaque point sur la surface corresponde un système unique de valeurs u, v, on dit que la représentation est propre (1).

(1) Si l'on pose $x=u^2$, $y=v^2$, $z=uv$, on obtient une représentation unicursale du cône $xy=z^2$. Elle est impropre, car au point du cône fourni par le système u, v correspond aussi le système $-u$, $-v$.

Théorème. — *Toute surface du second ordre est unicursale.*

En effet, prenons pour origine un point de la surface. L'équation de celle-ci s'écrit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Posons

$$y = ux, \qquad z = vx.$$

Ces équations représentent une droite, qui coupe la surface en un seul point, dont les coordonnées sont des fonctions de u et v : ces coordonnées seront donc rationnelles. De fait, nous obtenons

$$x(A + A'u^2 + A''v^2 + 2Buv + 2B'v + 2B''u) + 2(C + C'u + C''v) = 0 ;$$

de là on tire x et on en déduit facilement y et z. (C. q. f. d.)

Remarquons que la représentation ainsi obtenue est propre, en vertu des relations

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = \frac{z}{x},$$

qui montrent qu'à un point (x, y, z) de la surface autre que O correspond un seul système de valeurs u, v.

On peut aussi obtenir une représentation qui mette en évidence les *génératrices rectilignes,* l'un des systèmes correspondant aux lignes $u = \text{const}^{\text{te}}$, et l'autre aux lignes $v = \text{const}^{\text{te}}$. Si la quadrique a des génératrices réelles, on obtient ainsi des expressions réelles pour les coordonnées d'un point quelconque. Plaçons-nous dans ce cas.

Indiquons d'abord la *méthode qui permet d'obtenir les génératrices* à partir de l'équation de la quadrique. Coupons la surface par un plan tangent ; nous obtenons deux génératrices G_1 et G_2 de systèmes différents. Menons un plan sécant variable par G_1 ; nous obtenons toutes les génératrices du même système que G_2. De même, un plan passant par G_2 donnera celles de l'autre système. Soient

$$P_1 = Q_1 = 0, \qquad P_2 = Q_2 = 0$$

les systèmes d'équations représentant respectivement G_1 et G_2. Un plan passant par G_1 a pour équation

$$P_1 + \lambda Q_1 = 0;$$

de même, un plan passant par G_2 a pour équation

$$P_2 + \mu Q_2 = 0.$$

L'ensemble de ces deux dernières équations représente une droite issue du point fixe commun aux deux génératrices G_1 et G_2 : elle rencontre la quadrique en un deuxième point, dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de λ et de μ, qui, d'après ce qui précède, sont les paramètres des génératrices de chaque système : λ reste constant sur les génératrices du même système que G_2, et μ sur les autres génératrices.

Appliquons cette méthode aux équations réduites:

1° Hyperboloïde a une nappe. — Soit la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Le plan tangent $x = a$ la coupe suivant les deux génératrices

$$G_1 \begin{cases} x = a, \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}; \end{cases} \qquad G_2 \begin{cases} x = a, \\ \dfrac{y}{b} = -\dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

Un plan passant par G_1 détermine une génératrice du second système :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \lambda \left(1 - \dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

Un plan passant par G_2 détermine de même une génératrice du premier système :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \mu \left(1 + \dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

Les quatre dernières équations forment un système compatible, puisque deux génératrices de systèmes différents sont dans un même plan. En le résolvant en x, y, z, on obtient la représentation paramétrique cherchée :

$$\frac{x}{a}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \frac{y}{b}=\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \frac{z}{c}=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

2° Paraboloïde hyperbolique. — Considérons deux longueurs positives p et q, et le paraboloïde hyperbolique

$$2x=\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}.$$

Le plan tangent $x=0$ détermine dans la surface les génératrices

$$G_1 \left\{ \begin{aligned} &x=0, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}}=\frac{z}{\sqrt{q}}, \end{aligned} \right. \qquad \text{et} \qquad G_2 \left\{ \begin{aligned} &x=0, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}}=-\frac{z}{\sqrt{q}}. \end{aligned} \right.$$

De là, on déduit comme précédemment les deux systèmes de génératrices

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

De ces quatre équations compatibles, on déduit la représentation paramétrique

$$x=\frac{1}{2\lambda\mu}, \qquad 2\frac{y}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}, \qquad 2\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}.$$

Exercice. — Montrer que la surface représentée par les trois équations

$$\begin{aligned} x &= x_0+au+a'v+a''uv, \\ y &= y_0+bu+b'v+b''uv, \\ z &= z_0+cu+c'v+c''uv \end{aligned}$$

est en général un paraboloïde hyperbolique. On fera voir, pour cela, qu'elle admet deux systèmes de génératrices, et que chaque système est formé de droites parallèles à un même plan.

II. — Les problèmes graphiques sur les quadriques convexes.

201. Toute quadrique qui n'admet pas de génératrices réelles n'a en commun avec chacun de ses plans tangents que son point de contact ; elle est donc située tout entière d'un même côté, par rapport à l'un quelconque de ces plans. Pour exprimer cette propriété, nous donnerons à toutes ces quadriques le nom de *quadriques convexes*. Cette catégorie comprend : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde elliptique.

Nous allons montrer comment les théories exposées dans la section précédente permettent de résoudre simplement, pour ces surfaces, deux problèmes importants pour les applications graphiques :

1° Intersection avec une droite ;

2° Plans tangents menés par une droite.

Toute quadrique convexe peut se déduire, nous l'avons vu, d'une quadrique de révolution, en dilatant ou réduisant par rapport à un plan méridien les ordonnées de cette dernière. Nous pouvons donc nous borner à résoudre ces problèmes pour l'ellipsoïde de révolution, l'hyperboloïde de révolution à deux nappes et le paraboloïde de révolution. Ces trois surfaces possèdent en commun la propriété suivante :

Elles ont au moins un sommet réel sur l'axe de révolution. Désignons par S ce point et convenons que l'axe de la surface est vertical. Nous allons établir la proposition suivante :

Tout cône de sommet S *qui s'appuie sur une section plane de la surface admet les plans horizontaux comme plans de sections circulaires.*

En effet, un tel cône et la quadrique, ayant en commun une première courbe du second ordre, en ont une seconde, qui possède en S un point d'ordre deux. Donc elle se décompose en deux droites, situées dans le plan tangent en S à la quadrique. Ces deux droites sont les droites isotropes menées par S dans ce

plan. Tout plan horizontal, parallèle au plan tangent en S, coupe le cône suivant une conique qui passe par les points à l'infini de ces droites, c'est-à-dire suivant un cercle. (C. q. f. d.)

Cette proposition fournit immédiatement la solution des deux problèmes proposés pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes.

Prenons, par exemple, un ellipsoïde de révolution : soit à trouver ses points de rencontre avec une droite D. Par D, l'on mène un plan auxiliaire, qui coupe l'ellipsoïde suivant une courbe, dont la perspective, faite d'un des sommets situés sur l'axe, sur un plan perpendiculaire à l'axe, est une circonférence. Des points de rencontre de celle-ci avec la perspective de D, l'on déduit les points cherchés.

Si l'on fait varier le plan auxiliaire mené par D, les cercles du plan horizontal, obtenus comme perspectives des sections de ces plans, forment un faisceau : ils passent en effet par les perspectives des points de rencontre de D et de l'ellipsoïde. Si ces points sont réels, ce faisceau n'a pas de points limites réels. Par contre, si D est extérieure à l'ellipsoïde, le faisceau a deux points limites, qui sont les perspectives des points de contact des plans tangents menés de D. Notre second problème est donc résolu.

On pourrait opérer de même pour le paraboloïde, en mettant en jeu son unique sommet. Mais il est préférable d'utiliser la proposition importante que voici :

Toute section plane d'un paraboloïde de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un cercle.

Cette proposition peut être regardée comme un cas limite de la précédente, en supposant que l'on parte d'un ellipsoïde et que l'un de ses sommets s'éloigne indéfiniment, de manière que la surface tende vers un paraboloïde. Mais on peut aussi démontrer ce résultat directement. Notre cylindre et notre paraboloïde ont leurs axes parallèles : comme ils ont une conique commune, les plans directeurs, pour l'un et l'autre, sont parallèles aux directions asymptotiques de cette conique. Le cylindre projetant a donc des plans directeurs isotropes, et, par suite, la projection considérée est un cercle.

Pour résoudre sur le paraboloïde les deux problèmes indiqués, on opère donc comme précédemment, mais cette fois avec l'avantage de remplacer une projection conique par une projection orthogonale.

Nous avons déjà donné (n° 120) la solution des mêmes questions, dans le cas des quadriques réglées.

III. — Propriétés projectives des quadriques [1]. Pôles et plans polaires.

202. Points conjugués par rapport à une quadrique. Plan tangent en un point. — On dit que deux points $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ sont conjugués par rapport à une quadrique, s'ils divisent harmoniquement la corde de la quadrique portée par la droite M_1M_2. Soit la surface du second ordre

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

On démontre, comme en géométrie plane, que la relation

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + t_1 f'_{t_2} = 0,$$

ou, indifféremment,

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} + t_2 f'_{t_1} = 0,$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que M_1 et M_2 soient conjugués.

Le lieu des conjugués d'un point fixe M_1 est le plan

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} + t f'_{t_1} = 0,$$

qu'on nomme *plan polaire* de M_1. Si M_1 est sur la surface, cette équation n'est autre que celle du plan tangent en M_1. Donc, le plan tangent à une quadrique est le lieu des conjugués de son point de contact.

[1] Nous avons déjà rencontré de telles propriétés (nos 118 et 119); nous conseillons vivement à l'élève de se reporter aux théories générales de l'homographie.

203. Théorie des pôles et plans polaires pour une quadrique non développable. — La quadrique considérée n'a pas de point singulier. Soit M_1 un point non situé sur cette quadrique. On peut lui mener par M_1 une infinité de plans tangents, formant une famille à un paramètre : le point de contact de l'un de ses plans tangents, étant conjugué de M_1, se trouve dans son plan polaire. Tous les plans tangents issus de M_1 enveloppent *le cône circonscrit* à la surface, de sommet M_1. La courbe de contact de ce cône et de la quadrique est donc l'intersection de cette dernière et du plan polaire de M_1.

Pour avoir l'équation de ce cône, il suffit d'ailleurs d'appliquer la méthode (n° 172) qui nous a donné l'équation de l'ensemble des tangentes à une courbe du second ordre. Pour que le point (x, y, z, t) soit sur le cône circonscrit de sommet M_1, il faut et il suffit que l'équation

$$f(x_1 + \lambda x, y_1 + \lambda y, z_1 + \lambda z, t_1 + \lambda t) = 0$$

ait une racine double en λ. L'équation cherchée est donc

$$(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1})^2 - 4f(x, y, z, t)f(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0.$$

Définissons maintenant le *pôle d'un plan* ; s'il s'agit d'un plan tangent, on peut le regarder comme le plan polaire de son point de contact, qui, par définition, est le pôle en question. Soit maintenant un plan P non tangent ; il coupe la quadrique suivant une conique indécomposée ; prenons sur celle-ci trois points A, B, C. Les plans tangents à la quadrique en ces points se coupent en un point M et un seul. Le plan polaire de M contient les points A, B, C, donc c'est le plan P. Il y a donc un point et un seul ayant P comme plan polaire, et on l'appelle le pôle de ce plan.

La réciprocité entre deux points conjugués entraîne la propriété suivante :

Si un point est dans un plan, le plan polaire du point contient le pôle du plan.

204. Droites conjuguées. — Supposons qu'un point M décrive une droite D. Nous allons montrer que le plan polaire de M con-

tient une droite fixe Δ, et, en outre, qu'il y a réciprocité entre D et Δ, auxquelles on donne le nom de *droites conjuguées*.

Pour l'établir, prenons sur D deux points M′ et M″, dont les plans polaires, P′ et P″, se coupent suivant une droite Δ. Tout point de Δ est conjugué de M′ et de M″ par rapport à la surface. Donc le plan polaire d'un point de Δ contient la droite M′M″. En outre, un point quelconque de M′M″ est conjugué de tout point de Δ, donc le plan polaire d'un point M de D passe par Δ : il y a bien réciprocité. (C. q. f. d.)

Soient x', y', z', t' et x'', y'', z'', t'' les coordonnées homogènes des points M′ et M″. Celles d'un point M de D sont

$$x' + \lambda x'', \qquad y' + \lambda y'', \qquad z' + \lambda z''; \qquad t' + \lambda t''.$$

Son plan polaire a donc pour équation

$$(x' + \lambda x'')f'_x + (y' + \lambda y'')f'_y + (z' + \lambda z'')f'_z + (t' + \lambda t'')f'_t = 0.$$

On retrouve ainsi que ce plan passe par une droite fixe, et on aperçoit en outre la propriété suivante :

Le rapport anharmonique de quatre positions de M *sur* D *est égal à celui de leurs quatre plans polaires autour de* Δ.

En prenant pour M′ et M″ les points de rencontre de D et de la quadrique, on obtient le résultat suivant :

La droite conjuguée d'une droite D *est encore l'intersection des plans tangents aux points où* D *perce la quadrique ; c'est aussi, à cause de la réciprocité, la droite qui joint les points de contact des plans tangents menés par* D.

Si D est tangente à la surface en un point M, le plan tangent en M contient la conjuguée Δ. Le plan polaire d'un autre point de D coupe le plan tangent suivant une droite issue de M et conjuguée harmonique de D par rapport aux deux génératrices du point M. Donc une tangente à la surface a pour conjuguée une autre tangente en ce point, et ces deux droites forment un faisceau harmonique avec les génératrices de ce point.

Théorème. — *Le lieu des pôles d'une droite par rapport aux sections coniques dont les plans passent par cette droite est la droite conjuguée.*

En effet, menons par D un plan quelconque, et soit μ le pôle de D par rapport à la section qu'il détermine. La droite conjuguée Δ de D coupe ce plan en un point conjugué de tous les points de D, c'est-à-dire en un point qui se confond avec μ. (C. q. f. d.)

205. Cas du cône. — Si une quadrique présente un point double, il est conjugué de n'importe quel autre point. Donc le plan polaire d'un point M quelconque passe par le sommet; ce plan est d'ailleurs celui des génératrices de contact des plans tangents au cône menés de M. Le plan polaire du sommet est indéterminé.

Un plan passant par le sommet possède une infinité de pôles, situés sur la droite commune aux deux plans tangents le long des génératrices qu'il détermine dans le cône. On ne peut guère parler du pôle d'un plan ne passant pas par le sommet.

Une droite D passant par le sommet admet une infinité de conjuguées situées dans le plan polaire d'un de ses points. Si D ne passe pas par le sommet, elle a une conjuguée et une seule, qui n'est autre que la droite, lieu des pôles du plan passant par le sommet et D.

IV. — Propriétés du type linéaire. Plans diamétraux et diamètres.

206. Plan diamétral conjugué d'une direction de cordes. — Suivant une marche analogue à celle qui nous a conduit, pour les coniques, à la théorie des diamètres, nous appliquerons les résultats de la section précédente, en supposant que certains points soient rejetés à l'infini.

Cherchons, en particulier, ce que devient le théorème du plan polaire quand le point est rejeté à l'infini; soient alors α, β, γ, 0 ses coordonnées homogènes. Toutes les cordes issues de ce point sont parallèles à la direction (α, β, γ), et, sur chacune d'elles, le conjugué, par rapport aux extrémités, du point à l'infini, en occupe le milieu. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le lieu des milieux des cordes parallèles à la direction (α, β, γ) *est le plan*

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0, \quad (1)$$

qu'on nomme plan diamétral conjugué de la direction (α, β, γ).

Cette équation convient (voyez n° 175), que les coordonnées soient ou non homogènes.

Le point (α, β, γ, 0) n'est situé sur la quadrique que si la direction (α, β, γ) est parallèle à une génératrice du cône directeur. Chaque parallèle coupe alors la surface en un seul point à distance finie. La recherche du lieu du milieu des cordes ne se pose plus. Mais, pour sauvegarder la généralité de certaines réciproques, on dit encore que l'équation (1) représente un plan diamétral, auquel on donne le nom de plan diamétral singulier. Dans le cas d'une quadrique à centre, un plan diamétral singulier est tangent au cône asymptote le long de la génératrice à laquelle il correspond, puisque ce plan est tangent à la quadrique au point à l'infini de cette génératrice [1].

207. Propriétés des plans diamétraux : 1° dans les quadriques à centre unique. — Une telle surface coupe le plan de l'infini suivant une conique indécomposée C. Soit M le point à l'infini sur la direction (α, β, γ) ; supposons que M ne soit pas sur C, son plan polaire coupe le plan de l'infini suivant la polaire de M par rapport à C. En outre, il passe par le centre, qui est le pôle du plan de l'infini. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Dans un ellipsoïde ou un hyperboloïde, tous les plans diamétraux passent par le centre. En outre, si le plan diamétral d'une direction d contient la direction δ, le plan diamétral de la direction δ contient la direction d (conséquence de la proposition du n° 171).

Inversement, tout plan passant par le centre peut s'écrire sous la forme

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

et être considéré comme le plan diamétral conjugué d'une direction (α, β, γ). Cela résulte encore de ce que ce plan, passant par le pôle du plan de l'infini, a son pôle à l'infini.

---

[1] Se souvenir que le cône asymptote est le cône circonscrit à la quadrique le long de sa conique à l'infini.

Le plan diamétral d'une direction d est le plan de la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à d. Remarquons enfin que le plan diamétral d'une direction est le même dans la quadrique et dans le cône asymptote, puisque ces surfaces ont même centre, et même conique à l'infini. Dans le cône asymptote, le plan diamétral d'une droite issue du sommet se confond d'ailleurs avec le plan polaire d'un point de cette droite.

2° **Dans les paraboloïdes.** — Le plan diamétral de la direction (α, β, γ) est parallèle au plan

$$\alpha\varphi'_x + \beta\varphi'_y + \gamma\varphi'_z = 0.$$

Puisque la forme $\varphi(x, y, z)$ se décompose, les trois plans

$$\varphi'_x = 0, \qquad \varphi'_y = 0, \qquad \varphi'_z = 0$$

ont une droite commune, parallèle à l'axe du paraboloïde. Donc tous les plans diamétraux sont parallèles à cette droite. Ainsi :

Dans un paraboloïde, tout plan diamétral est parallèle à l'axe.

On pourrait encore le démontrer en remarquant que la polaire de M par rapport à la conique à l'infini, réduite à deux droites, passe par le point commun à ces droites, qui est le point à l'infini de l'axe.

Inversement, tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral. Toutefois la trace d'un tel plan sur le plan de l'infini possède une infinité de pôles, alignés avec le point à l'infini sur l'axe. Donc la direction à laquelle il correspond est indéterminée. Elle obéit à la seule condition d'être parallèle à un plan contenant l'axe, et dont la direction est conjuguée harmonique de celle du plan donné par rapport à celles des plans directeurs. De là résulte la notion de *plans diamétraux conjugués.*

Prenons le plan diamétral d'une certaine direction d, et, dans ce plan, une direction δ. Son plan diamétral est parallèle à d. A ces plans, liés, quant à leurs directions, par un caractère de réciprocité, on donne le nom de plans diamétraux conjugués.

L'élève montrera qu'en prenant pour xOz et yOz deux plans diamétraux conjugués, et pour plan xOy le plan tangent au point O de leur intersection situé sur la surface, l'équation de celle-ci prend la forme

$$\frac{x^2}{p'}+\frac{y^2}{q'}=2z.$$

3° **Dans les cylindres.** — La théorie des plans diamétraux ne diffère pas essentiellement de celle des diamètres dans les coniques. Nous laissons au lecteur le soin de la développer.

208. Diamètre conjugué d'une direction de plans. — **Théorème.** — *Les plans diamétraux de toutes les directions d'un plan* P *passent par une même droite, qu'on appelle diamètre conjugué du plan* P.

En effet, le plan P coupe le plan de l'infini suivant une droite Δ, dont les points correspondent aux différentes directions du plan P ; soit M l'un d'eux ; le plan diamétral conjugué de la direction correspondante, c'est-à-dire le plan polaire de M, passe par la droite conjuguée de Δ. (C. q. f. d.)

Le diamètre du plan P est encore le lieu des pôles de Δ par rapport aux sections dont les plans contiennent cette droite. C'est donc le lieu des centres des coniques situées dans des plans parallèles au plan P.

Donnons aussi une démonstration analytique du théorème précédent. Soit

$$ux+vy+wz=0$$

le plan mené par O parallèlement à P. Soit (α, β, γ) une direction parallèle à ce plan, c'est-à-dire telle que

(2) $$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

Son plan diamétral

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0$$

passe, quels que soient les nombres α, β, γ liés par la relation (2), par la droite

$$(3) \qquad \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w},$$

qui est le diamètre du plan P.

Toutes les fois qu'on demande le centre d'une section de la quadrique par un plan

$$ux + vy + wz + h = 0$$

parallèle à P, il suffit de prendre l'intersection de ce plan et de son diamètre conjugué défini par les équations (3).

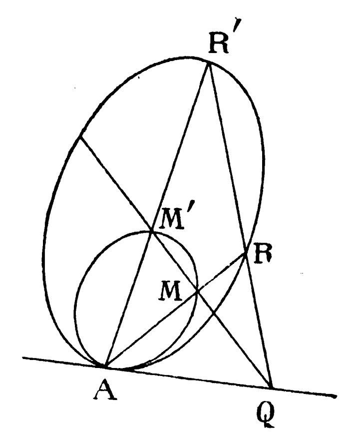
209. Disposition des diamètres : 1° dans les quadriques à centre unique. — Tout diamètre passe par le centre. Le diamètre conjugué d'un plan est le même dans la quadrique et dans son cône asymptote, puisque ces deux quadriques ont même centre et même conique à l'infini. Donc un plan coupe la quadrique et son cône asymptote suivant deux coniques, qui sont, non seulement homothétiques, mais encore concentriques.

Cette dernière propriété peut d'ailleurs se rattacher aux considérations suivantes : un plan coupe la quadrique et son cône asymptote suivant deux coniques bitangentes (puisque ce cône est circonscrit à la quadrique le long de sa conique à l'infini). Donc ces coniques ont mêmes points à l'infini, et, en outre, la droite de l'infini a même pôle par rapport à chacune d'elles, donc elles sont homothétiques et concentriques, sauf toutefois si le plan est un plan de section parabolique. De bitangentes, elles deviennent alors (les deux points de contact se confondant) *surosculatrices*. Par un passage à la limite, on en conclut aisément que tout point de la tangente au point de contact A a même polaire par rapport à ces deux coniques (¹) et par suite qu'en menant par A deux droites AMR et AM'R', la corde MM' de la première conique et la corde RR' de la seconde se coupent sur la tangente en A. Donc si le plan considéré coupe le cône asymptote suivant des paraboles, la figure MRR'M' devient un parallélogramme, dont les côtés MR et M'R' ont

---

(¹) Dans le cas de deux coniques bitangentes, cette propriété appartient à tout point de la corde des contacts.

la direction de l'axe. Les deux paraboles se déduisent donc l'une de l'autre par *une translation parallèle à cet axe.* Dans ce cas, la conjuguée de la droite à l'infini de leur plan P est la génératrice de contact du cône asymptote et de son plan tangent parallèle au plan P. Cette droite satisfait à la définition du diamètre, c'est-à-dire qu'elle est dans le plan diamétral de chaque direction de P; mais les sections parallèles à P n'ont plus de centres, à l'exception de celle qui contient le sommet du cône asymptote et qui est formée d'un système de deux droites parallèles; celle-là possède une infinité de centres, dont le lieu est justement le diamètre en question.



2° **Dans les paraboloïdes.** — Supposons que le plan P ne soit parallèle ni aux plans directeurs, ni à leur intersection. La conique à l'infini du paraboloïde se réduit à deux droites, mais la droite à l'infini Δ du plan P ne passe pas par leur point commun. Donc elle n'est pas tangente à la surface. Sa conjuguée joint les points de contact des plans tangents menés de Δ à la quadrique. Or ces plans sont tout d'abord le plan de l'infini, ensuite le plan tangent au paraboloïde parallèle à P. En définitive, nous obtenons donc le résultat suivant :

Le diamètre conjugué du plan P *est la parallèle à l'axe menée par le point de contact du paraboloïde et de son plan tangent parallèle au plan* P.

Ce dernier est facile à déterminer graphiquement pour un paraboloïde hyperbolique. On connaît en effet la direction des génératrices de contact, qui sont parallèles aux intersections de P par les plans directeurs. On est donc ramené à trouver des droites de direction donnée, s'appuyant chacune sur deux droites données. On ramène le cas du paraboloïde elliptique à celui du paraboloïde de révolution. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer, dans ce cas, un plan tangent de direction connue.

Si P est parallèle à l'axe sans l'être à un plan directeur, sa

droite à l'infini Δ passe par le point commun aux deux génératrices à l'infini. Dans ce cas, nous l'avons déjà vu, les plans diamétraux des diverses directions du plan P sont parallèles. Tous les plans parallèles à P donnant pour sections des paraboles, il n'y a pas d'ailleurs de lieu de centres. Enfin si P est parallèle à un plan directeur, les plans diamétraux des directions de P sont parallèles à P.

3° **Dans les cylindres.** — Pour un cylindre à centres, un seul diamètre, qui est le lieu des centres. Ce diamètre disparaît lorsque le cylindre devient parabolique.

210. Systèmes de trois diamètres conjugués dans l'ellipsoïde ou les hyperboloïdes. — Considérons une quadrique à cône directeur indécomposé, et la conique Γ suivant laquelle elle coupe le plan de l'infini. Considérons un trièdre ayant pour sommet le centre de la quadrique, les points à l'infini de ses arêtes formant un triangle conjugué (n° 173) par rapport à la conique Γ. Ce trièdre possède les propriétés suivantes :

1° *Chaque arête est le diamètre conjugué de la face opposée ;*

2° *Chaque face est le plan diamétral conjugué de l'arête opposée.*

Si l'on prend un système d'axes obliques, les axes étant les arêtes d'un tel trièdre, la surface aura une équation de la forme

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1.$$

Le raisonnement fait au n° 198 pour montrer qu'une quadrique non de révolution admet un trièdre de symétrie unique, montre par là-même que, parmi les trièdres précédents, un seul est trirectangle ; c'est précisément ce trièdre de symétrie.

211. Contour apparent d'une quadrique. — Projetons orthogonalement les points d'une quadrique sur un plan que, pour la commodité de l'exposition, nous supposerons horizontal.

La courbe de contact du cylindre circonscrit à génératrices verticales constitue le contour apparent dans l'espace : le plan de cette courbe est le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Si la surface est convexe, ses points se projettent tous dans la concavité du contour apparent en projection ; par contre, si elle a des génératrices réelles, ses points se projettent dans la convexité de ce contour apparent. Cette courbe est alors l'enveloppe des projections des génératrices. S'il existe sur la quadrique une génératrice verticale, il y en a une deuxième de système différent, s'il s'agit d'un hyperboloïde, et alors le contour apparent se réduit à un système de deux points ; ou bien, s'il s'agit d'un paraboloïde, cette génératrice est unique : le contour apparent est alors formé de la trace de cette génératrice et du point à l'infini sur la trace du plan directeur vertical.

Pour un cône, le contour apparent comprend deux génératrices, réelles ou imaginaires. Lorsque le cône admet une génératrice verticale, son contour apparent se réduit à deux points confondus sur la trace horizontale du plan tangent le long de cette génératrice.

Si deux quadriques sont circonscrites le long d'une conique, leurs contours apparents sont bitangents, et chacun d'eux l'est à la projection de cette conique. Nous laissons à l'élève le soin de l'établir. En particulier, si le contour apparent d'un hyperboloïde est une hyperbole, celle-ci a pour asymptotes le contour apparent en projection du cône asymptote.

V. — Équations tangentielles des quadriques.

212. Nous avons vu qu'une quadrique non développable possède une seule équation tangentielle. Ainsi la surface

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0$$

a pour équation tangentielle

$$Au^2+Bv^2+Cw^2-r^2=0.$$

Celle du paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

est

$$pu^2+qv^2-2wr=0.$$

Inversement, une équation tangentielle

$$f(u, v, w, r)=0 \tag{1}$$

dont le premier membre est un polynome homogène du second degré, impose, en général, à un plan d'envelopper une quadrique non développable. Toutefois, si, remplaçant u, v, w, r par x, y, z, t on obtient l'équation ponctuelle d'un cône, la condition exprimée par l'équation (1) est que le plan reste tangent à une conique dont le plan est corrélatif du sommet de ce cône.

Un cône a deux équations tangentielles : l'une exprime que le plan tangent passe par le sommet. L'autre, du second ordre, représenterait, prise isolément, une quadrique non développable (ou une conique), à laquelle le cône serait circonscrit (ou par laquelle il passerait). Ainsi le cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

a pour équations tangentielles

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2=0, \qquad r=0,$$

(conique du plan de l'infini) (équation du point O).

Cônes supplémentaires. — Soit

$$\varphi(x, y, z)=0$$

un cône ayant pour sommet l'origine. Il a pour équations tangentielles

$$\psi(u, v, w)=0, \qquad r=0.$$

Considérons un plan tangent à ce cône, soit

$$ux+vy+wz=0.$$

Menons par O la perpendiculaire à ce plan. Elle a pour para-

mètres directeurs u, v, w. Le lieu de cette perpendiculaire est donc le cône

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

qu'on nomme le cône supplémentaire. Il y a réciprocité entre ces deux cônes : on peut le déduire de la réciprocité entre les formes φ et ψ (il est clair que ψ n'est autre que le premier membre de l'équation tangentielle de la conique représentée ponctuellement par $\varphi = 0$, quand x, y, z représentent les coordonnées homogènes d'un point du plan). Il est facile aussi d'en donner une démonstration géométrique : nous invitons l'élève à la rechercher, et à montrer que les bases de ces cônes dans un plan, situé à l'unité de distance de leur sommet, sont des courbes corrélatives.

CHAPITRE XII

INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES

I. — Cas de décomposition.

213. Deux quadriques se coupent suivant une courbe d'ordre quatre, ou suivant un système de courbes dont la somme des ordres est quatre ; ce système peut donc comprendre :

1° une droite et une cubique gauche ;

2° deux coniques, pouvant se confondre, pouvant aussi se réduire individuellement à deux droites, distinctes ou non.

Nous étudierons d'abord les cas de décomposition.

214. Quadriques ayant une génératrice commune. — Soient deux quadriques Q et Q′, non réduites à des cônes, et possédant en commun une génératrice G. Nous distinguerons deux cas :

Premier cas : les plans tangents à Q et Q′ en un point de G ne coïncident pas en général. — Un plan variable P, passant par G, coupe Q suivant une autre droite D, et Q′ suivant une autre droite D′, dont le point commun M décrit la partie C de l'intersection distincte de G. Pour que C rencontre G, il faut et il suffit que M vienne sur G, ou que, pour un plan P particulier, D et D′ se coupent sur G. Ce plan devrait donc être tangent en un même point de G à Q et à Q′. Or, si P tourne autour de G,

ses points de contact avec Q et Q′ se correspondent homographiquement sur cette droite, car, d'après une proposition établie au n° 121, le rapport anharmonique de quatre positions P_1, P_2, P_3, P_4 du plan P est égal, d'une part à celui de leurs points de contact avec Q, d'autre part à celui de leurs points de contact avec Q′. Cette homographie possède, dans le cas actuel, deux points doubles A et B. Donc la courbe C rencontre la génératrice G en ces points, qui sont des points d'ordre deux de l'intersection totale.

Cette courbe C, qui est, dans le cas général, une *cubique gauche* (il n'y a pas de cubique plane sur une quadrique), peut elle-même se décomposer. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les deux quadriques possèdent en commun une autre droite G_1 : si elle est du même système que G, les droites AA_1 et BB_1 qui la rencontrent et qui sont situées dans les plans tangents en A et B, ont trois points communs avec chaque quadrique, et, par suite, appartiennent à l'intersection, qui se réduit à un quadrilatère gauche. Si G et G_1 sont de systèmes différents, appelons A leur point commun. Si, au deuxième point B de G, où les plans tangents coïncident, les génératrices du même système que G_1, pour l'une et l'autre quadrique, sont distinctes, l'intersection comprend, outre G et G_1, une conique indécomposée s'appuyant sur ces droites, etc...

Second cas : en chaque point de G, Q et Q′ ont même plan tangent. — Chaque point de G est alors un point d'ordre deux de l'intersection (au moins). Cela posé, un plan sécant P, passant par G, coupe Q et Q′ suivant des droites D et D′ issues d'un même point de G. Les points de l'intersection extérieurs à G ne peuvent provenir que de la confusion des droites D et D′, qui correspondent à certains plans P. Cette circonstance peut se produire au plus pour deux positions du plan P, puisque si Q et Q′ avaient en commun trois génératrices de même système, elles coïncideraient. Dans ce cas, Q et Q′ ont donc en commun la génératrice G, qui compte pour deux unités, plus deux autres génératrices, distinctes ou confondues.

REMARQUE. — Dans cette discussion, nous avons laissé de côté le cas où l'une de nos quadriques serait un cône. Supposons que Q soit un cône ayant une génératrice G commune avec une autre quadrique Q'. Si le long de G, Q et Q' ont le même plan tangent (second cas), Q' est aussi un cône. Ces cônes ont en commun la génératrice double G, et en général une conique. Mais il peut aussi se faire que G compte pour plus de deux unités. Si G compte pour trois, l'intersection comprendra une autre génératrice (cônes osculateurs) ; G pourra enfin, comptant pour quatre, former à elle seule l'intersection (cônes surosculateurs). Dans ces deux derniers cas, les sommets sont confondus.

Si Q et Q' sont deux cônes de sommets différents, ayant une génératrice G commune, mais non tangents le long de G, ils ne peuvent avoir en commun d'autres génératrices. Donc le reste de leur intersection est une cubique gauche passant par leurs sommets.

Si Q est un cône et Q' une quadrique non développable, possédant une génératrice G commune, il y a décomposition de la cubique, dans le cas seulement où la deuxième génératrice de Q' issue du sommet du cône est sur ce cône.

215. Quadriques se coupant suivant deux coniques. — Si deux quadriques ont en commun une première conique, elles en ont une seconde, qui peut se décomposer, mais alors, ayant une droite commune (et même deux), on peut leur appliquer la discussion précédente. Nous n'y reviendrons pas.

Soient donc C et D les deux coniques indécomposées, communes aux quadriques Q et Q'. Supposons d'abord ces courbes distinctes. Leurs plans se coupent suivant une droite Δ, qui rencontre la quadrique Q en deux points A et B. Donc A et B sont communs à C et D, par suite aussi à Q et Q'. Donc en A et B, ces surfaces ont le même plan tangent.

Il peut arriver que Q et Q' aient en commun une conique double C. Chaque point de C étant un point d'ordre deux de l'intersection, Q et Q' sont tangentes le long de C, et admettent le même cône circonscrit suivant ces coniques. Des deux quadriques considérées, l'une est alors inscrite dans l'autre.

216. Comment reconnaître si l'intersection se décompose. — Ainsi, toutes les fois que l'intersection se décompose, en deux au moins de ses points, les deux surfaces admettent le même plan tangent, si l'on raisonne sur des surfaces non réduites à des cônes. On donne à cet énoncé une forme s'appliquant à tous les cas en le libellant ainsi :

Si l'intersection de deux quadriques se décompose, elle présente au moins deux points d'ordre deux (ou un point d'ordre supérieur).

Inversement, *si l'intersection de deux quadriques présente deux points d'ordre deux, elle se décompose.*

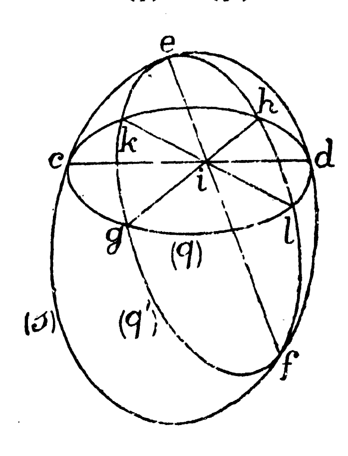
En effet, soient A et B ces points. Par AB et un point M de l'intersection, extérieur à cette droite, faisons passer un plan. Il coupe la courbe en cinq points au moins. Comme elle est d'ordre quatre, l'intersection se décompose. Ou bien AB est génératrice commune, et nous tombons dans le cas examiné au n° 214, ou bien il n'en est pas ainsi, le plan ABM coupe alors les deux quadriques suivant deux coniques, qui, ayant plus de quatre points communs, sont confondues.

Remarque. — S'il existe sur l'intersection trois points d'ordre deux non en ligne droite, elle se réduit à une conique double, susceptible de décomposition.

Théorème. — *Deux quadriques circonscrites à une même troisième se coupent suivant deux coniques, dont les plans forment un faisceau harmonique avec ceux des courbes de contact.*

Soient la quadrique Q circonscrite à une autre, S, le long d'une conique Γ, et une quadrique Q' circonscrite à S le long de Γ'. Aux points A et B communs à Γ et Γ' sur S, Q et Q' ont le même plan tangent, celui de S ; comme AB n'est pas génératrice commune, Q et Q' se coupent suivant deux coniques dont les plans passent par AB. Reste à montrer que ces plans sont conjugués par rapport à ceux de Γ et Γ' : prenons les traces de nos quatre plans sur un plan sécant, qui détermine, dans Q et

Q′, deux coniques (q) et (q'), bitangentes à la section (s) de S. Le point commun i aux deux cordes de contact appartient aussi, d'après la première partie du théorème, aux deux cordes communes à (q) et (q'), traces des plans des deux coniques d'intersection. Cela posé, faisons varier Q, de manière qu'elle reste inscrite dans S le long de Γ. Alors (q) varie en restant bitangente à (s) aux extrémités de la corde cd. Les deux droites gh et kl varient en se coupant toujours au point fixe i. La correspondance entre ces droites est réciproque ; en outre, à chaque position de gh correspond une position unique de la conique (q) (¹), et par suite une position unique de kl. Donc ig et il engendrent des faisceaux involutifs dont les rayons doubles sont manifestement les cordes de contact cd et ef, qui sont bien conjuguées par rapport à gh et kl. (C. q. f. d.)



Théorème. — *Si l'intersection présente un point d'ordre trois, elle se décompose.*

Soit A un point d'ordre trois. Prenons sur l'intersection deux autres points B et C. Ou bien, ils sont alignés avec A : les deux quadriques ont une génératrice commune ; ou bien ils déterminent un plan, qui, possédant cinq points communs avec la courbe, en possède une infinité. (C. q. f. d.)

Si l'intersection présente un point d'ordre quatre, elle se décompose, nous l'avons déjà vu, en quatre droites passant par ce point. Donc, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'intersection de deux quadriques est indécomposée, la seule singularité qu'elle puisse présenter est un point d'ordre deux.

(¹) S'il y en avait deux, elles auraient en commun deux points en c, deux en d, un en g, un autre en h, et par suite se confondraient.

II. — Cas d'une intersection indécomposée.

217. Nous venons de voir que si l'intersection est effectivement une courbe du quatrième ordre, elle présente au plus un point d'ordre deux.

Cette singularité existe dans deux cas :

1° si l'une des quadriques est un cône ayant son sommet sur l'autre ;

2° si les deux surfaces ont même plan tangent en un point de leur intersection. Dans ce cas, le cône ayant pour sommet ce point et pour directrice l'intersection est du second ordre, puisqu'il a deux génératrices dans chaque plan issu du sommet. Le deuxième cas se trouve ainsi ramené au premier. Les tangentes au point d'ordre deux sont à l'intersection du cône et du plan tangent à l'autre quadrique.

Lorsque l'intersection de deux quadriques possède un point d'ordre deux, elle est unicursale.

Soit A ce point, B un autre point de la courbe. Un plan passant par AB la rencontre en un seul point, qui varie avec la direction de ce plan. Les coordonnées de ce point sont donc des fonctions rationnelles du λ de ce plan.

Nous reviendrons plus loin sur le cas d'une intersection indécomposée en étudiant la projection de l'intersection.

III. — Points à l'infini de l'intersection.

218. Les seuls cas nouveaux pour nous sont ceux où cette intersection est indécomposée, ou comprend une cubique gauche [1].

---

[1] Pour les applications, remarquons que si deux quadriques ont même cône directeur, elles ont une conique commune à l'infini. A distance finie, elles ont en commun une conique, pouvant se réduire à un système de deux droites.

Soit une branche infinie d'une courbe algébrique gauche. Elle admet une *direction asymptotique* (même définition que pour les courbes planes), qui correspond au point où elle rencontre le plan de l'infini. Si ce point est simple, la courbe y possède une tangente, qui constitue, si elle est à distance finie, une *asymptote*. En effet, soit P un plan contenant cette droite, P′ un plan parallèle à P. En appelant n l'ordre de la courbe, P′ coupe celle-ci en $n-1$ points à distance finie. Quand P′ tend vers P, un de ces points s'éloigne indéfiniment ; en effet P ne la coupe plus qu'en $n-2$ points au maximum (exactement en $n-2$ dans le cas de l'intersection de deux quadriques, qui ne présente pas de points inflexionnels, une tangente à cette courbe qui aurait avec elle trois points communs étant nécessairement une génératrice commune aux deux surfaces). La droite en question est donc bien une asymptote, puisque l'un des points de rencontre de P′ et de la courbe s'en rapproche indéfiniment, alors qu'il s'éloigne constamment d'un plan fixe perpendiculaire à cette droite. Si, au point à l'infini de la branche considérée, la tangente est tout entière à l'infini, il peut se faire que le plan osculateur soit à distance finie. Appelons encore P ce plan, qui coupe la courbe en $n-3$ points à distance finie, alors qu'un plan parallèle infiniment voisin la coupe en $n-2$ points. Ce plan sera un plan asymptote de la courbe : si on la projette orthogonalement sur un plan perpendiculaire au plan P, on aura une asymptote en projection, alors qu'il n'y a pas d'asymptote dans l'espace.

Considérons maintenant un point d'ordre deux à l'infini. On peut répéter, pour chaque branche de courbe qui y aboutit, la discussion précédente.

219. Les directions asymptotiques sont celles des génératrices communes aux deux cônes directeurs, ayant pour sommet un même point de l'espace. Dans l'intersection de ces cônes, une génératrice peut compter pour une, deux, trois, quatre unités : elle peut donc fournir une direction asymptotique simple, double, triple, quadruple. Si cette direction est simple, au point à l'infini

correspondant, il n'y a pas contact de la courbe et du plan de l'infini, donc *à toute direction asymptotique simple correspond une asymptote.* Si l'une des quadriques est ou un hyperboloïde, ou un cylindre hyperbolique, l'asymptote précédente est située, soit dans le plan tangent au cône asymptote le long de la génératrice de direction asymptotique, soit dans les plans asymptotes. Si l'une des quadriques est un paraboloïde, à chaque direction asymptotique correspond une génératrice parallèle de cette surface, d'ailleurs unique, et le plan tangent au point à l'infini de cette génératrice, parallèle au plan directeur correspondant, contient l'asymptote.

Considérons maintenant une direction asymptotique double, correspondant à un point simple à l'infini. Le plan de l'infini coupe les deux quadriques : ou bien suivant deux coniques tangentes, ou bien suivant une conique et un système de deux droites qui se coupent sur cette conique. Dans le premier cas, les cônes directeurs de même sommet, pour les deux surfaces, sont tangents le long d'une génératrice G. Soit P_1 le plan tangent commun. Les plans parallèles à P_1 sont de sections paraboliques, pour nos deux surfaces, les axes des paraboles étant parallèles à G. Quand le plan de section est mené au hasard, les paraboles ont deux points communs ; ce plan, de direction fixe, passe donc constamment par la tangente à l'infini à la branche de courbe étudiée. Il devient osculateur à l'infini, lorsque, parmi ses points de rencontre, un troisième est rejeté à l'infini. Il faut et il suffit pour cela que les deux paraboles qu'il détermine se déduisent l'une de l'autre par translation. Dans le deuxième cas, il peut se faire que le cône directeur de la première surface soit indécomposé, autrement dit qu'on ait en présence un hyperboloïde et un paraboloïde, d'axe parallèle à une génératrice du cône asymptote de la première surface. Des plans parallèles au plan tangent à ce cône, suivant cette génératrice, coupent les deux surfaces suivant des paraboles, et le problème se pose comme dans le cas précédent. Il peut enfin se faire que la première surface soit elle-même un paraboloïde, dont l'un des plans directeurs est parallèle à l'axe du second. Des plans sécants, parallèles à ce plan

directeur, coupent la première surface suivant une droite, la deuxième suivant une parabole. S'il existe un plan asymptote, c'est celui pour lequel la droite devient parallèle à l'axe de la parabole, etc.

S'il y a un point double à l'infini, on peut supposer que l'une des quadriques est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la direction qui correspond à ce point double. Si les génératrices de ce cylindre qui se trouvent dans le plan tangent en ce point à la première surface sont à distance finie, elles fournissent des asymptotes de l'intersection.

IV. — Projection de l'intersection.

220. Ayant en vue les applications à la géométrie descriptive, nous ne ferons que des projections orthogonales, laissant à l'élève le soin d'étendre les résultats de cette étude au cas où l'on ferait des projections coniques. En outre nous ne nous occuperons, comme précédemment, que des cas d'indécomposition, ou de décomposition donnant une cubique.

Projetons, pour simplifier l'exposition, sur le plan horizontal. En général, une projetante rencontre l'intersection en un seul point. L'ordre de la projection est alors égal à celui de la courbe de l'espace.

Dans ce cas, il peut arriver, à titre exceptionnel, qu'une verticale rencontre l'intersection en deux points. Son milieu étant simultanément dans les plans diamétraux conjugués des cordes verticales des deux quadriques, on voit que les points doubles apparents, qui résultent de cette circonstance, sont sur la projection de la droite commune aux plans de contours apparents horizontaux. Cette droite (droite des points doubles apparents) est la trace d'un plan vertical, qui détermine, dans nos surfaces, deux coniques ayant, pour les cordes verticales, le même diamètre conjugué. Elles ont quatre points communs, ayant deux à deux même projection horizontale. Ainsi :

La projection de l'intersection de deux quadriques sur un

plan présente deux points doubles (¹). Il peut y en avoir un troisième, résultant d'un point réellement double de l'intersection dans l'espace. Cet énoncé suppose que l'intersection est indécomposée. Si elle comprend une cubique et une droite, nous aurons en projection quatre points doubles : deux qui proviennent des points d'appui de la droite sur la cubique dans l'espace, un point double apparent de la cubique, et le troisième point commun aux projections de la cubique et de la droite. Ce dernier est de suite déterminé à l'aide de la droite des points doubles. Quant au point double apparent de la cubique, on peut obtenir trois droites concourant en ce point : prenons trois points sur la cubique ; nous déterminons trois cônes du second ordre, ayant pour sommets ces points, pour directrice la cubique. Le sommet du trièdre des plans de contour apparent horizontal de ces cônes se projette au point cherché.

221. Si les plans de contour apparent horizontal de nos quadriques sont confondus, tous les points de la projection sont des points doubles apparents. Son ordre est donc égal à deux. Ainsi :

Si les cordes verticales ont même plan diamétral, l'intersection se projette horizontalement suivant une conique.

Pour qu'une droite soit direction asymptotique de cette conique, il faut que le plan vertical qu'elle détermine coupe les quadriques suivant deux coniques n'ayant plus que deux points communs (de même projection) à distance finie. Les plans verticaux, déterminant dans les quadriques des sections homothétiques, fournissent donc les directions asymptotiques. Si les sections obtenues par un plan sont non seulement homothétiques mais encore concentriques, la trace de ce plan est asymptote de la conique projection (²).

En particulier, si deux quadriques ont un plan de symétrie,

(¹) Cet énoncé suppose que les quadriques n'ont pas en commun une direction asymptotique perpendiculaire au plan de projection. Sinon, la projection horizontale de l'intersection serait une cubique, et il n'y aurait pas de point double apparent.

(²) Il est à remarquer que, dans ce cas, un point réel de la projection peut provenir de deux points imaginaires conjugués de l'intersection elle-même.

leur intersection s'y projette suivant une conique. Plus spécialement, deux surfaces de révolution du second ordre à axes verticaux, ayant un plan de symétrie horizontal, ont leur intersection projetée sur ce plan suivant un cercle. En effet, cette projection est une conique qui passe par tous les points communs aux coniques déterminées dans nos deux surfaces par le plan horizontal, donc en particulier par les points cycliques.

On déduit de cette proposition une méthode élégante pour trouver les points de rencontre d'une droite et d'une surface gauche de révolution. Par la droite, on fait passer à cet effet un autre hyperboloïde de révolution dont le plan du cercle de gorge se confond avec celui du premier. Projetant sur ce plan, on construit aisément, par la remarque précédente, les projections des points d'intersection.

CHAPITRE XIII

COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE

I. — Cas des sections normales.

222. Les axes étant rectangulaires, considérons la surface S, d'équation

$$z = f(x, y),$$

tangente en O au plan xOy ; pour qu'il en soit ainsi, il faut que les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f s'annulent en O. Si l'on ne fait sur f aucune autre hypothèse, la *variation du rayon de courbure* en O d'une section qui contient la normale Oz peut s'opérer suivant une loi absolument quelconque. On le comprend immédiatement en remarquant qu'on peut prendre pour S le lieu d'un cercle ayant son centre sur Oz et passant par O. Il est clair que lorsque son plan tourne autour de Oz, la loi de variation de son rayon peut être prise arbitrairement.

Cette remarque nous montre l'importance du théorème suivant :

Théorème. — *Si, au point* O, *la fonction* $f(x, y)$ *admet des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclusivement, toutes les dérivées secondes n'étant pas nulles, la courbure en ce point d'une section normale est une forme quadratique en* $\cos\varphi$ *et* $\sin\varphi$, φ *étant l'angle du plan de la section avec* Ox.

En effet, nous pouvons appliquer à $f(x, y)$ la formule de Mac-Laurin ; servons-nous des notations de Monge

$$p = f'_x, \qquad q = f'_y, \qquad r = f''_{x^2}, \qquad s = f''_{xy}, \qquad t = f''_{y^2}.$$

Appelons r_0, s_0, t_0 les valeurs prises en O par r, s, t. Nous pouvons écrire

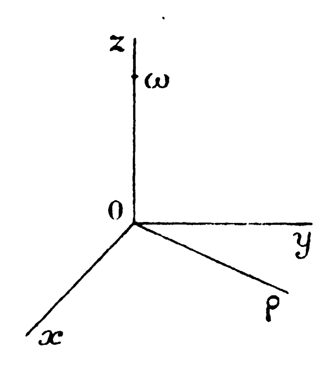
$$2z = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 \\ + \frac{1}{3}\left[x^3 f'''_{x^3}(\theta x, \theta y) + 3x^2 y f'''_{x^2 y}(\theta x, \theta y) + \cdots\right],$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1. En supposant que les dérivées troisièmes soient bornées au voisinage de O, on peut donc écrire l'équation de S sous la forme

$$(1) \quad 2z = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + \mathrm{G}x^3 + \mathrm{H}x^2y + \mathrm{K}xy^2 + \mathrm{L}y^3,$$

G, H, K, L représentant des fonctions de x et y, qui restent finies au voisinage de O.

On peut supprimer les quatre derniers termes sans altérer la valeur de la courbure en O d'une section passant par Oz. En effet, soit φ l'angle du plan de cette section avec Ox ; dans son plan, son équation s'obtient en remplaçant dans (1) x par $\rho \cos \varphi$ et y par $\rho \sin \varphi$. Le rayon de courbure en O est alors la limite de $\frac{\rho^2}{2z}$, et la courbure celle de $\frac{2z}{\rho^2}$. Seuls, les termes du second degré y contribuent, ceux du troisième donnant zéro. La valeur de cette courbure est



$$r_0 \cos^2 \varphi + 2s_0 \cos \varphi \sin \varphi + t_0 \sin^2 \varphi.$$

Avec précision, en appelant ω le centre de courbure en O de la section considérée, cette expression est égale à $\frac{1}{\mathrm{O}\omega}$.

Ainsi, l'hypothèse que $f(x, y)$ est développable par la for

mule de Mac-Laurin impose à la courbure en O d'une section normale de S *de varier suivant une loi extrêmement simple* quand le plan de cette section tourne autour de la normale Oz.

223. Indicatrice de Dupin. — Pour mieux dégager cette loi, nous allons lui donner une forme géométrique, en introduisant l'indicatrice de Dupin. Remarquons d'abord que le théorème précédent peut encore s'énoncer comme suit :

La courbure en O *d'une section normale est la même dans la surface* S *et dans le paraboloïde*

$$2z = r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2.$$

Considérons la courbe

$$1 = |r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2|.$$

Elle constitue l'indicatrice de Dupin, par définition. Son rayon vecteur est lié au rayon de courbure de la section normale correspondante par la relation

$$\rho^2 = |\overline{O\omega}|.$$

Dans le cas où $r_0 t_0 - s_0{}^2$ est positif, l'indicatrice est une ellipse, $\overline{O\omega}$ est alors de signe constant, toutes les sections de S par Oz tournent leurs concavités d'un même côté du plan xOy. On dit qu'au point O la surface S est *convexe*[1]. Si $r_0 t_0 - s_0^2$ est négatif, l'indicatrice se compose de deux hyperboles conjuguées. La concavité d'une section est d'un côté ou de l'autre du plan xOy, suivant la position de la trace de son plan par rapport aux asymptotes de l'indicatrice ; on dit alors qu'en O la surface est à *courbures opposées*. C'est le cas des surfaces réglées du second ordre : les asymptotes de l'indicatrice sont alors les deux génératrices, puisque les sections correspondant à ces asymptotes doivent avoir en O une courbure nulle. Enfin si $r_0 t_0 - s_0^2$ est nul, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles.

---

[1] Nous avons déjà défini les quadriques convexes : le lecteur n'aura aucune peine à montrer que, dans ce cas particulier, la définition actuelle concorde avec celle que nous avons précédemment donnée.

On peut, d'autre part, considérer l'indicatrice comme un agrandissement de l'aspect présenté dans le voisinage de O par la section déterminée dans S par un plan parallèle au plan tangent en O et infiniment voisin de ce plan. Il faut supposer à cet effet que le rapport d'homothétie croisse indéfiniment. Si le plan de section a pour équation $z = \varepsilon$, on obtient en projection sur xOy la courbe

$$2\varepsilon = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3.$$

On voit aisément qu'on obtient comme courbe limite l'indicatrice, en prenant pour rapport d'homothétie $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$.

Lorsque S est une quadrique, toutes ses sections par des plans parallèles sont homothétiques, et, par suite, il y a homothétie rigoureuse de l'une d'elles avec l'indicatrice d'un plan tangent parallèle à celui de cette section. Il s'ensuit que, si en un seul point de la surface, $r_0t_0 - s_0^2$ est nul, le plan tangent en ce point coupe la surface suivant deux droites confondues, et, par suite, elle se réduit à un cône. D'une manière générale, soit S une surface quelconque. Si, pour cette surface, $rt - s^2$ s'annule en chaque point, la quantité

$$dp = rdx + sdy$$

ne peut s'annuler sans qu'il en soit de même de

$$dq = sdx + tdy;$$

c'est-à-dire la constance de p entraîne celle de q; elle entraîne aussi celle de $z - px - qy$, car la différentielle de cette quantité est

$$-xdp - ydq.$$

Par suite, si $rt - s^2$ est nul, les coefficients p, q, $z - px - qy$ du plan tangent

$$Z - pX - qY = z - px - qy$$

sont fonction de l'un d'eux. La surface est donc *développable*. Nous proposons inversement, comme exercice, de montrer qu'en chaque point d'une développable, on a bien

$$rt - s^2 = 0.$$

224. Directions principales. — Au lieu de laisser arbitraire, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, le choix des axes Ox, Oy dans le plan tangent, confondons-les avec les axes de

l'indicatrice, ou, comme on dit, avec les *directions principales* de la surface au point O. Dans ces conditions, appelons ω_1 le centre de courbure en O de la section par xOz, ω_2 celui de la section par yOz. Nous aurons

$$(2) \qquad \frac{1}{O\omega} = \frac{1}{O\omega_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{O\omega_2}\sin^2\varphi,$$

après détermination, bien aisée, de r_0 et t_0 (il est clair que s_0 est nul).

COURBURE MOYENNE. — *La somme des courbures des sections situées dans deux plans rectangulaires passant par la normale est constante.* On l'appelle *courbure moyenne* en O.

En effet, considérons les sections qui font avec Ox les angles φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$; soient ω et ω' leurs centres de courbure ; ω est donné par la relation (2) et ω' par la suivante :

$$(3) \qquad \frac{1}{O\omega'} = \frac{1}{O\omega_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{O\omega_2}\cos^2\varphi.$$

Ajoutant (2) et (3), on a

$$\frac{1}{O\omega} + \frac{1}{O\omega'} = \frac{1}{O\omega_1} + \frac{1}{O\omega_2},$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

225. Application. — En un point d'ordre deux de l'intersection de deux surfaces algébriques, provenant de la coïncidence des plans tangents, les tangentes sont les diamètres communs aux deux indicatrices.

En effet, prenons le point considéré comme origine, le plan xOy étant le plan tangent commun. Dans le voisinage de O, la cote d'un point de l'une des surfaces peut se développer par la formule de Mac-Laurin, ce qui donne

$$2z = r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + \cdots,$$
$$2z = r_1x^2 + 2s_1xy + t_1y^2 + \cdots$$

En projetant sur le plan tangent, on voit que la courbe obtenue a une équation de la forme

$$(r_1 - r_0)x^2 + 2(s_1 - s_0)xy + (t_1 - t_0)y^2 + \cdots = 0,$$

les termes négligés étant de degré supérieur au second. On obtient les tangentes en annulant l'ensemble des termes du second degré (voyez page 141). Le faisceau de droites ainsi obtenu est aussi celui qui provient de la soustraction des équations des deux indicatrices : il représente donc les diamètres communs à ces deux coniques.

II. — Courbure d'une section quelconque. Théorème de Meusnier.

226. Formule donnant la courbure d'une courbe quelconque. — Soit, sur la surface

(1) $$z = f(x, y),$$

une courbe quelconque C, dont l'arc sera désigné par σ (pour éviter de le confondre avec f''_{xy}, que nous désignons toujours par s). Les coordonnées x, y, z d'un point de cette courbe sont des fonctions de σ vérifiant la relation (1) identiquement, et, par suite, satisfaisant de même à toutes les relations déduites de (1) par dérivation. Nous allons dériver deux fois, en tenant compte des formules fondamentales (voyez nos 150 et 153) :

$$\alpha = \frac{dx}{d\sigma}, \qquad \beta = \frac{dy}{d\sigma}, \qquad \gamma = \frac{dz}{d\sigma},$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{\beta_1}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{\gamma_1}{R}, \qquad (R > 0),$$

où α, β, γ et α_1, β_1, γ_1 sont les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale à C au point (x, y, z). Il vient, par une première dérivation,

$$\gamma = p\alpha + q\beta;$$

dérivons une seconde fois, en tenant compte des formules

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy.$$

Il vient

$$\frac{\gamma_1 - p\alpha_1 - q\beta_1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Considérons au point (x, y, z) la demi-normale à S faisant avec Oz un angle aigu. Ses cosinus directeurs sont

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Nous pouvons donc, en appelant θ l'angle de cette demi-droite avec la demi-normale principale positive à C, écrire en définitive

$$(2) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

227. Réduction du cas général au cas où C est une section plane. — Considérons un point M déterminé de S ; en ce point p, q, r, s, t ont des valeurs invariables. Si pour deux courbes C et C′ de la surface qui passent en ce point, le plan osculateur (distinct du plan tangent) est le même, il s'ensuit que la tangente est la même. Donc le second membre de (2) a même valeur pour les deux courbes. En outre, les deux courbes ont même normale principale, avec le même sens positif, puisque, dans (2), R désignant une quantité essentiellement positive, $\cos\theta$ a le même signe pour C et C′. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si en un point d'une surface passent deux courbes C et C′ admettant en ce point le même plan osculateur, distinct du plan tangent, ces lignes admettent même centre de courbure en ce point.

Par exemple, toute courbe gauche a même centre de courbure en un point que sa projection sur son plan osculateur en ce point.

On voit l'importance du théorème précédent : le centre de

courbure ne dépendant que du plan osculateur, on peut, si C est une courbe gauche tracée sur S, la remplacer par la section de S par le plan osculateur de C au point considéré. Le centre de courbure en ce point n'est pas altéré.

228. Réduction du cas d'une section plane quelconque à celui d'une section normale. — Considérons un point M d'une section plane de S. Soit MT la tangente en M. Par MT, il passe une infinité de sections planes, dont une section normale. Pour toutes ces sections, le second membre de (2) possède la même valeur. Il en est donc de même du premier membre. Appelons ω le centre de courbure en M d'une section plane quelconque passant par MT, et ω_0 celui de la section normale. Nous pouvons toujours supposer que Oz ait été choisi de manière que l'angle de $M\omega_0$ avec Oz soit aigu. Dès lors, nous déduisons de la formule (2)

$$\frac{\cos \omega M \omega_0}{M\omega} = \frac{1}{M\omega_0},$$

relation qu'on peut traduire par le théorème suivant, dû au général Meusnier :

Le lieu des centres de courbure en M *des sections planes de* S *passant par la tangente* MT *est le cercle binormal à* MT, *décrit sur le rayon de courbure de celle des sections passant par la normale en* M, *comme diamètre.*

Ici encore, la loi très simple que nous obtenons pour fixer la distribution des centres de courbure est un effet des hypothèses de dérivabilité de la fonction f.

Remarque. — En supposant que M soit pris pour origine, on peut, à l'aide de la formule (2), traiter le cas des sections normales. Le second membre se réduit à

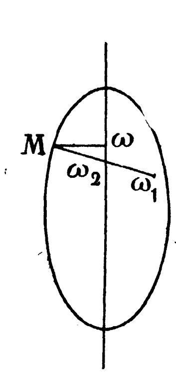
$$r_0 \cos^2 \varphi + 2s_0 \cos \varphi \sin \varphi + t_0 \sin^2 \varphi,$$

et le premier membre à $\frac{1}{\overline{O\omega}}$ (c'est évident en valeur absolue ; en signe l'égalité se vérifie en remarquant que si $\overline{O\omega}$ est positif, la

concavité est tournée vers les z positifs, les deux demi-normales positives se confondent, donc $\cos \theta = +1$, etc.).

229. Applications. — 1° *Trouver les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution.*

Ces rayons sont, par définition, ceux des sections normales principales (n° 224). Or en un point d'une surface de révolution les directions principales sont, par raison de symétrie, celles des tangentes au parallèle et au méridien. Le méridien étant une section normale, son centre de courbure ω_1 en M nous fournit immédiatement l'un des rayons cherchés ; soit $M\omega_1$. Le parallèle de M n'est pas une section normale, mais nous connaissons son centre de courbure ω en M. Considérons la section normale dont le plan passe par la tangente en M au parallèle. D'après le théorème de Meusnier, ω est sur un cercle, situé dans le plan méridien de M, ayant son diamètre porté par la normale $M\omega_1$, avec M pour l'une de ses extrémités. La deuxième est donc sur l'axe de la surface. Nous connaissons ainsi le second rayon de courbure principal $M\omega_2$.



Cela permettra, le cas échéant, de construire l'indicatrice en M.

2° *Trouver le plan osculateur en un point de l'intersection de deux surfaces* S *et* S'.

Soit MT la tangente en ce point ; considérons S ; d'après la proposition du n° 228, le cercle de Meusnier sera le lieu des centres de courbure en M non seulement de toutes les sections planes, mais encore de toutes les courbes de la surface S ayant pour tangente MT. Soit ω le centre de courbure en M de la courbe commune à S et S'. Le plan osoulateur cherché est $MT\omega$. Or le point ω s'obtient, d'après la remarque précédente, par l'intersection des cercles de Meusnier relatifs à S et S'.

Lorsque MT est vertical, cette remarque permet d'obtenir la tangente à la projection horizontale de la courbe.

COMPLÉMENTS

I. — Applications de la théorie des déterminants à l'étude de la droite et du plan.

230. Jusqu'à présent, nous avons laissé de côté les raisonnements qui mettent en jeu des déterminants ; nous avons considéré que, dans les premiers problèmes proposés à l'élève, il intervient en général un petit nombre de paramètres et d'équations. La discussion de ces questions fait donc entrer en ligne de compte un ensemble d'hypothèses assez restreint pour qu'on puisse les formuler et les classer, sans le secours d'une théorie nouvelle.

Par contre, dès qu'un problème comporte un certain caractère de généralité, par le nombre des paramètres et des équations dont il dépend, la théorie des déterminants est souvent, pour sa discussion, un auxiliaire précieux.

Le déterminant est un instrument de calcul forgé pour donner sous forme condensée le résultat de la résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Sa définition et ses propriétés peuvent s'obtenir, dans le cas de $n = 3$, à partir du volume algébrique du parallélépipède (1). Nous allons rappeler, en les rattachant à ce point de vue, quelques faits essentiels de la théorie des équations linéaires.

Soient trois vecteurs issus de l'origine et dont les extrémités ont pour coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Le parallélépipède construit sur ces vecteurs a un volume qui peut s'écrire

$$(\mathbf{OM}_1, \mathbf{OM}_2, \mathbf{OM}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(1) Voir n° 31 ; voir aussi l'*Initiation aux Méthodes vectorielles*, n°s 25 et 26.

Pour que ce volume s'annule, il faut et il suffit que nos vecteurs soient dans un même plan, c'est-à-dire qu'il existe trois nombres u, v, w non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 &= 0, \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 &= 0, \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 &= 0\,; \end{aligned}$$

d'où ce théorème, qui s'étend aux déterminants d'ordre quelconque :

Pour qu'un déterminant soit nul, il faut et il suffit qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les éléments des lignes.

Voici une application. Proposons-nous d'écrire que, moyennant un choix convenable de x, les trois équations

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

admettent des solutions communes en y et z. Cela revient à exprimer que le vecteur de composantes

$$a_1x - d_1, \qquad a_2x - d_2, \qquad a_3x - d_3$$

se trouve dans le plan déterminé par les deux vecteurs

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \qquad \text{et} \qquad c_1,\ c_2,\ c_3.$$

Nous obtenons donc la condition

$$\begin{vmatrix} a_1x - d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2x - d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3x - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\text{(1)} \qquad x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous retrouvons, dans cette voie, la règle de Cramer pour la résolution du système (S) : ou plutôt, nous démontrons que s'il existe trois nombres x, y, z satisfaisant à ce système, x vérifie nécessairement l'équation (1), les deux autres inconnues vérifiant chacune une équation analogue.

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

formé avec les coefficients des équations de (S) est $\neq 0$, on voit par là

que ce système admettra une solution et une seule. Nous dirons qu'il est ***régulièrement résoluble.*** S'il est nul, le système sera impossible ou indéterminé.

231. Systèmes linéaires quelconques. — Pour approfondir la discussion du système (S) précédent, dans le cas où son déterminant D est nul, il suffit de mettre en œuvre quelques remarques extrêmement simples. Ces remarques conduisent d'ailleurs, d'un seul coup, aux règles qui permettent de statuer sur un système du premier degré comprenant un nombre quelconque d'équations, avec un nombre quelconque d'inconnues.

Soit donc un système de k équations à i inconnues : s'il existe des solutions de ce système, les valeurs correspondantes des inconnues satisferont aussi au système obtenu en barrant quelques-unes de nos équations. Il est donc naturel de chercher à prélever, sur le système donné, p équations ($p \leqslant i$) formant un système régulièrement résoluble par rapport à p des inconnues qu'elles renferment, et cela, de manière que l'entier p soit aussi grand que possible : l'expérienc acquise dans les cas les plus simples nous fait comprendre que, souvent, un tel prélèvement pourra s'opérer de différentes manières : peu importe, nous fixerons notre attention sur l'une d'elles. Appelons ***système réduit*** le système ainsi prélevé : d'après ce qui précède, on peut y mettre en évidence p inconnues par rapport auxquelles il est régulièrement résoluble. Cette résolution nous conduira (d'après la règle de Cramer) à calculer notamment le déterminant des coefficients de ces p inconnues dans le système réduit : soit Δ ce déterminant ; on dit qu'il est un ***déterminant principal*** du système initial : pour obtenir un déterminant principal, il suffit, d'après ce qui précède, d'écrire le tableau des coefficients et d'en extraire un déterminant au nombre maximum de rangées qui ne soit pas nul.

Cela posé, nous pouvons toujours choisir les notations de manière que le déterminant principal adopté soit formé avec les coefficients des p premières inconnues dans les p premières équations. Le système de ces p équations est indéterminé d'ordre $i - p$, car, ayant donné des valeurs arbitraires à $x_{p+1}, \ldots, x_i$, on peut en tirer par la règle de Cramer les p premières inconnues.

Les équations de rang $> p$, s'il s'en présente, ne pourront que confirmer ou infirmer le résultat du calcul précédent : jamais, elles ne le compléteront en concourant à la détermination d'inconnues nouvelles, sinon p serait inférieur (et non égal) au nombre maximum d'équations régulièrement résolubles. En général, ces équations de rang $> p$ ne seront donc pas compatibles avec les p premières. On peut trouver facilement la condition pour qu'exceptionnellement cette compatibilité

ait lieu. Il suffit de prendre une à une nos équations jusqu'ici délaissées et d'écrire que chacune peut se concilier avec les p équations du système réduit. Supposons, pour fixer les idées, que le système réduit soit formé des deux équations

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

Nous devrons écrire que les valeurs de x et y, tirées de ces deux équations, satisfont par exemple à

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

et cela, quelle que soit la valeur attribuée à z. Nous devrons donc avoir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 - c_1z \\ a_2 & b_2 & d_2 - c_2z \\ a_3 & b_3 & d_3 - c_3z \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre se décompose en deux déterminants : celui qui contient z en facteur est nul (sinon le déterminant principal serait d'ordre trois, contrairement à l'hypothèse) [1]. Nous trouvons finalement la condition

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé, ayant formé le système réduit, pour exprimer la compatibilité des équations supplémentaires, il nous suffit d'annuler le déterminant obtenu en bordant le déterminant principal :

1° en bas, par les coefficients de l'équation à concilier ;

2° latéralement, par les termes formant les seconds membres des p premières équations et de l'équation à concilier.

Ce déterminant est, par définition, le *déterminant caractéristique* de l'équation à concilier.

En résumé, pour étudier un système d'équations du premier degré, on commence par former un système réduit, c'est-à-dire : régulièrement résoluble par rapport au nombre maximum d'inconnues. La compatibilité du système total dépend de l'annulation des déterminants caractéristiques relatifs aux équations supplémentaires.

232. Détermination de plans ou de droites. — Dans les problèmes de cette catégorie, les inconnues sont les coefficients du

(1) Et il en serait de même des déterminants auxquels donnerait éventuellement naissance chaque inconnue supplémentaire.

plan cherché, ou de deux plans déterminant la droite. En principe, on est toujours ramené à une détermination de plans. Nous traiterons deux exemples.

Soit d'abord à *trouver le plan passant par trois points*

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2), \qquad M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Pour qu'un point $M(x, y, z)$ soit dans ce plan, il faut et il suffit qu'il existe des nombres u, v, w, r non tous nuls, tels qu'on ait simultanément

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + r &= 0, \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + r &= 0, \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + r &= 0, \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + r &= 0, \end{aligned}$$

ou encore que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il peut alors se présenter deux cas : en développant le déterminant suivant les éléments de sa première ligne, les coefficients obtenus ne sont pas tous nuls ; ou bien tous ces coefficients sont nuls, et alors tout point M est dans un même plan avec M_1, M_2, M_3. Ceci ne peut se produire que si ces trois points sont alignés. Si l'on exclut cette hypothèse, l'équation (1) est celle du plan déterminé par les points M_1, M_2, M_3.

Cherchons maintenant *le plan parallèle à deux directions données* (a, b, c) *et* (a', b', c') *et passant par un point donné* (x_1, y_1, z_1). Son équation est de la forme

$$u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0\,;$$

le parallélisme du plan et des deux directions données impose à u, v, w les deux conditions

$$\begin{aligned} au + bv + cw &= 0, \\ a'u + b'v + c'w &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'un point (x, y, z) appartienne au plan cherché, il faut et il suffit qu'il existe des nombres u, v, w non tous nuls satisfaisant aux trois relations précédentes, ou encore que l'on ait

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant par rapport à sa première ligne, les coefficients obtenus ne sont pas nuls, pourvu que les deux directions données soient distinctes. Le plan est alors bien déterminé et défini par l'équation (2).

233. Comme exemple de détermination d'une droite, nous rechercherons les équations de la *perpendiculaire commune* aux deux droites D_1 et D_2, représentées respectivement par les systèmes

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},$$
$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

Les paramètres directeurs de la perpendiculaire commune sont des nombres l, m, n satisfaisant aux conditions

$$la_1+mb_1+nc_1=0,$$
$$la_2+mb_2+nc_2=0.$$

Supposons que D_1 et D_2 ne soient pas parallèles. Nous pouvons prendre

$$l=b_1c_2-c_1b_2, \qquad m=c_1a_2-a_1c_2, \qquad n=a_1b_2-b_1a_2.$$

La perpendiculaire commune est immédiatement définie par l'intersection des plans menés par chacune des droites, parallèlement à la direction (l, m, n). Elle a donc pour équations

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — La plus courte distance de D_1 et de D_2 est la distance d'un point de D_2 au plan mené par D_1 parallèlement à D_2. Or ce plan a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc la plus courte distance en question est la valeur absolue de

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-c_1b_2)^2+(c_1a_2-a_1c_2)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2}}.$$

En écrivant que le numérateur de cette expression est nul, on obtient la condition pour que deux droites soient dans un même plan.

234. Intersections de droites et de plans. — Dans les problèmes précédents, nos inconnues étaient les coefficients u, v, w, r d'un certain plan, ou mieux les rapports de ces quantités à l'une d'elles. Nous allons maintenant supposer que les inconnues soient les coordonnées d'un point commun à plusieurs plans. Il faut distinguer deux cas, suivant que l'on adopte le point de vue linéaire ou le point de vue projectif. Le second conduit à des résultats plus simples que le premier, car il n'établit pas de distinction entre des éléments parallèles et des éléments concourants.

Nous plaçant d'abord au point de vue linéaire, nous supposerons qu'on se serve de coordonnées non homogènes. Nous traiterons deux exemples.

1° *Trouver l'intersection de trois plans.*

Soient les trois plans

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0\,; \end{aligned}$$

si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les trois plans ont un point commun et un seul. Si Δ est nul, supposons au moins un de ses mineurs à deux rangées, différent de zéro, soit

$$AB' - BA' \neq 0\,;$$

si le caractéristique

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les plans donnés ne se coupent pas. On peut alors trouver trois nombres u, v, w non tous nuls tels qu'on ait

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw &= 0, \\ A'u + B'v + C'w &= 0, \\ A''u + B''v + C''w &= 0, \end{aligned}$$

ce qui exprime que les plans donnés sont parallèles à une même droite. Si le caractéristique est nul, la troisième équation est une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire le troisième plan passe par l'intersection des deux premiers.

Enfin, si tous les mineurs à deux rangées de Δ sont nuls, les trois plans sont parallèles et n'ont en général aucun point commun. Ils peuvent cependant se confondre, moyennant deux conditions supplé-

mentaires, qui sont, en supposant que A n'est pas nul :

$$AD' - DA' = 0, \qquad AD'' - DA'' = 0.$$

2° *Trouver la condition pour que quatre plans soient concourants.*

Soient les quatre plans

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0, \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'ils aient en commun un point unique à distance finie, il faut et il suffit que trois d'entre eux se coupent à distance finie, et que l'autre passe par leur point commun. Donc un des déterminants à trois rangées, extrait du tableau des coefficients de x, y, z, doit être différent de zéro, en même temps que le caractéristique correspondant doit être nul.

Si l'on veut que les plans aient en commun une droite à distance finie, on écrira que deux d'entre eux se coupent et que les deux autres passent par leur intersection. Il faut et il suffit pour cela que le déterminant principal soit d'ordre deux et que les deux caractéristiques correspondants soient nuls.

235. Lorsqu'on adopte le point de vue projectif, la discussion des problèmes précédents se simplifie, du fait qu'il n'y a plus lieu de mettre à part les cas de parallélisme.

Supposons qu'on cherche l'intersection de trois plans, représentés, en coordonnées homogènes, par les équations

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + Dt &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D't &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D''t &= 0. \end{aligned}$$

On est ramené à chercher les solutions de ce système autres que la solution $x = y = z = t = 0$. Soit x_0, y_0, z_0, t_0 une telle solution. Il est clair que les nombres

$$\lambda x_0, \ \lambda y_0, \ \lambda z_0, \ \lambda t_0$$

forment anssi une solution. Réciproquement, toutes les solutions sont de cette dernière forme si, du tableau des coefficients de x, y, z, t, on peut extraire un déterminant principal d'ordre trois. Les plans ont alors en commun un point et un seul, à distance finie ou à l'infini. Si le déterminant principal est d'ordre deux, l'équation de l'un des plans est une combinaison linéaire de celle des deux autres : les trois plans ont une droite commune à distance finie ou à l'infini. Soit x_1, y_1, z_1, t_1 une solution du système, distincte de la solution x_0, y_0, z_0, t_0, c'est-à-

dire correspondant à un point différent. Toute solution du système est alors de la forme

$$\lambda x_0 + \mu x_1, \quad \lambda y_0 + \mu y_1, \quad \lambda z_0 + \mu z_1, \quad \lambda t_0 + \mu t_1;$$

nous retombons ainsi sur la représentation paramétrique d'une droite définie par deux points. Enfin, si le déterminant principal se réduit à l'un des éléments de notre tableau, nos trois plans se confondent. La solution générale de notre système est alors de la forme

$$\lambda x_0 + \mu x_1 + \nu x_2, \quad \lambda y_0 + \mu y_1 + \nu y_2, \quad \lambda z_0 + \mu z_1 + \nu z_2, \quad \lambda t_0 + \mu t_1 + \nu t_2,$$

en appelant (x_0, y_0, z_0, t_0), (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) trois solutions particulières distinctes, ou encore correspondant à trois points non alignés du plan représenté par chaque équation du système. Nous en déduisons le moyen d'évaluer les coordonnées d'un point d'un plan défini par trois points, en fonction de deux paramètres, les rapports de μ et ν à λ.

Soit encore à chercher la condition pour que quatre plans aient en commun au moins un point à distance finie ou à l'infini. Il faut et il suffit que le système formé par leurs équations homogènes admette au moins une solution autre que $x = y = z = t = 0$, c'est-à-dire que le déterminant de leurs coefficients soit nul. Si le déterminant principal est d'ordre trois, il y a alors un point unique commun à nos plans ; s'il est d'ordre deux, les quatre plans ont une droite commune. Enfin s'il se réduit à l'un des coefficients, les quatre plans sont confondus.

II. — Compléments à la théorie des courbes et surfaces du second ordre.

236. Discussion complète de la nature d'une courbe du second ordre. — Condition de décomposition. — Cette condition étant de nature projective, formons-la en supposant la conique définie en coordonnées homogènes. Soit la conique

$$f(x, y, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''t^2 + 2Byt + 2B'tx + 2B''xy = 0.$$

Pour qu'elle se décompose (n° 160), il faut et il suffit que les trois équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B't &= 0, \\ B''x + A'y + Bt &= 0, \\ B'x + By + A''t &= 0 \end{aligned}$$

aient au moins une solution autre que $x = y = t = 0$. Pour cela, il

faut donc que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

soit nul. Si l'un de ses mineurs à deux rangées n'est pas nul, les trois droites sur lesquelles s'annulent les dérivées partielles de f ont un seul point commun. La conique se décompose alors en deux droites distinctes. Par contre, si tous les mineurs à deux rangées de Δ sont nuls, les trois droites où s'annulent les dérivées de f sont confondues, et la conique admet une infinité de points d'ordre deux. Elle se réduit donc à une droite double.

237. Lorsque Δ n'est pas nul, la conique est indécomposée. Supposons les coefficients réels : en adoptant le point de vue linéaire, proposons-nous de trouver la nature de la conique, par le seul examen des coefficients de son équation. Pour cela, il faut faire intervenir le signe de

$$\delta = AC - B^2,$$

qui nous renseigne sur les points à l'infini de la courbe. Mais cela ne suffit pas ; nous n'avons pas, jusqu'à présent, le moyen de distinguer une ellipse réelle d'une ellipse imaginaire, et il faut compléter, sur ce point, les résultats du n° 162.

238. Calcul du terme constant, après une translation des axes amenant l'origine au centre. — C'est ce terme qui, par son signe, nous permettra, lorsque les directions asymptotiques sont imaginaires, d'opérer cette distinction.

Supposons donc δ non nul ; soient x_0, y_0 les coordonnées du centre. Les formules de transformation sont

$$x = x_0 + X, \qquad y = y_0 + Y.$$

Si l'équation de la conique par rapport au premier système est

$$f(x, y) = 0,$$

elle devient, après la translation des axes,

$$f(x_0 + X, y_0 + Y) = 0,$$

ou, puisque f'_{x_0} et f'_{y_0} sont nuls,

$$f(x_0, y_0) + \varphi(X, Y) = 0.$$

Pour calculer $f(x_0, y_0)$, appliquons l'identité d'Euler à la fonction homogène

$$g(x, y, t) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2,$$

qui, pour $t=1$, se réduit à $f(x, y)$. Nous avons

$$2f(x_0, y_0) = 2g(x_0, y_0, 1)$$
$$= x_0 g'_x(x_0, y_0, 1) + y_0 g'_y(x_0, y_0, 1) + g'_t(x_0, y_0, 1),$$

d'où

$$f(x_0, y_0) = Dx_0 + Ey_0 + F;$$

or, puisque le point (x_0, y_0) est centre, nous avons

$$0 = Ax_0 + By_0 + D,$$
$$0 = Bx_0 + Cy_0 + E;$$

écrivant que les trois dernières équations sont compatibles en x_0, y_0, on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F - f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit facilement

$$f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Après la translation d'axes, l'équation de la courbe devient donc

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

239. Résultats de la discussion. — Si donc δ est positif, c'est-à-dire si les directions asymptotiques sont imaginaires, la fonction $\varphi(X, Y)$ étant toujours du signe de A, la conique sera une ellipse, réelle si Δ est du signe de $-A$, imaginaire si Δ est du signe de A. Si Δ s'annule, elle se réduit à un système de deux droites imaginaires conjuguées. Nous pouvons donc maintenant dresser d'une manière complète le tableau permettant de reconnaître la nature d'une conique :

Nature des points à l'infini	*Nature de la courbe*
$\delta > 0$ (ces points sont imaginaires)	$A\Delta < 0$, Ellipse réelle. $\Delta = 0$, Deux droites imaginaires conjuguées. $A\Delta > 0$, Ellipse imaginaire.
$\delta = 0$ (ces points sont réels et confondus)	$\Delta \neq 0$, Parabole. $\Delta = 0$, Deux droites parallèles ou confondues.
$\delta < 0$ (ces points sont réels et distincts)	$\Delta \neq 0$, Hyperbole. $\Delta = 0$, Deux droites sécantes, réelles et distinctes.

240. Intérieur d'une conique. — Un point est à l'extérieur d'une conique, quand de ce point on peut mener à la courbe deux tangentes réelles. C'est là une propriété projective. Pour chercher,

dans le cas général, à quelle condition elle a lieu, nous partirons donc de l'équation homogène de la courbe. Soit

$$\Phi(x, y, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''t^2 + 2Byt + 2B'tx + 2B''xy = 0.$$

Nous pouvons encore l'écrire

$$(1) \qquad x\Phi'_x + y\Phi'_y + t\Phi'_t = 0.$$

Pour que le point (x_0, y_0, t_0) soit à l'extérieur de cette conique, il faut et il suffit que sa polaire la coupe en deux points réels, autrement dit, que le système des deux équations (1) et (2),

$$(2) \qquad x_0\Phi'_x + y_0\Phi'_y + t_0\Phi'_t = 0,$$

admette en x, y, t des solutions réelles, autres que $x = y = t = 0$. Or ce système est équivalent à celui des trois équations

$$\Phi'_x - \lambda(yt_0 - ty_0) = \Phi'_y - \lambda(tx_0 - xt_0) = \Phi'_t - \lambda(xy_0 - yx_0) = 0.$$

Pour calculer x, y, t, il suffit de trouver λ. Or, pour que ces trois équations aient des solutions non nulles, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B'' - \lambda t_0 & B' + \lambda y_0 \\ B'' + \lambda t_0 & A' & B - \lambda x_0 \\ B' - \lambda y_0 & B + \lambda x_0 & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qu'on peut écrire [1]

$$\Delta + \lambda^2\Phi(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

A un point de contact (x, y, t) réel doit correspondre une valeur de λ réelle, et réciproquement. L'extérieur de la conique est donc constitué par les points où Φ a le signe de $-\Delta$, et l'intérieur par ceux où Φ est du signe de Δ.

241. Discussion complète de la nature d'une quadrique. — Soit la quadrique

$$F(x, y, z, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2 = 0.$$

Nous avons

$$\frac{1}{2}F'_x = Ax + B''y + B'z + Ct,$$

$$\frac{1}{2}F'_y = B''x + A'y + Bz + C't,$$

$$\frac{1}{2}F'_z = B'x + By + A''z + C''t,$$

$$\frac{1}{2}F'_t = Cx + C'y + C''z + Dt.$$

---

[1] L'élève montrera que le premier membre ne contient pas de terme de degré impair en λ.

Considérons les deux déterminants

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

qui sont respectivement les discriminants des formes quadratiques $F(x, y, z, t)$ et $\Phi(x, y, z)$.

La quadrique n'admet aucun point d'ordre deux si H n'est pas nul. Si H est nul, mais admet un mineur à trois rangées non nul, la quadrique est un cône ou un cylindre. Si dans H le déterminant principal est au plus d'ordre deux, la quadrique se décompose en deux plans, etc., etc.

Le fait que Δ n'est pas nul signifie que le cône directeur est indécomposé. La surface possède alors un centre unique (x_0, y_0, z_0) et, en y transportant l'origine, on établit, en généralisant la démonstration du n° 238, que sa nouvelle équation est

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

Supposons les coefficients réels. Si l'équation

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

représente un cône imaginaire, son premier membre est toujours du signe de A. Comme l'équation

$$\Phi(x, y, 1) = 0$$

représente alors une ellipse imaginaire, on a, d'après le tableau du n° 239,

$$A\Delta > 0.$$

La quadrique est alors un ellipsoïde, imaginaire si H est positif, réel si H est négatif.

Si l'équation

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

représente un cône réel, la quadrique est un hyperboloïde. De ce qui a été vu au n° 240, nous déduisons qu'à l'intérieur du cône asymptote $\Phi = 0$, la fonction Φ est du signe de Δ. La surface est donc à l'intérieur de son cône asymptote si H est négatif, à l'extérieur si H est positif. Dans le premier cas, c'est un hyperboloïde à deux nappes, dans le second, un hyperboloïde à une nappe.

H n'étant pas nul, supposons maintenant que Δ le soit. Le cône directeur est décomposé, et la quadrique, dépourvue de point d'ordre deux, est un paraboloïde. Nous montrerons plus loin qu'il est hyper-

bolique si H est positif, elliptique si H est négatif (voyez n° 243, Remarque).

En un mot, la condition

$$H > 0$$

exprime que la quadrique a des génératrices rectilignes réelles. La condition contraire exprime que la quadrique est convexe. Enfin

$$H = 0$$

exprime que la quadrique se réduit à un cône.

242. Décomposition des formes quadratiques en sommes de carrés. — Nous nous bornerons à exposer cette théorie pour les formes à trois et quatre variables, en la déduisant des propriétés géométriques des courbes et surfaces du second ordre.

Plaçons-nous d'abord au point de vue projectif, sans distinguer les éléments réels des éléments imaginaires. Considérons par exemple une quadrique. On peut faire sur elle quatre hypothèses et quatre seulement :

1° Elle n'a que des points simples ;

2° Elle se réduit à un cône indécomposé ;

3° Elle se décompose en deux plans distincts ;

4° Elle se ramène à un plan double.

Soit alors

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation homogène de la quadrique. Faisons-lui subir une transformation homographique

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z + a'''T, \\ y &= bX + b'Y + b''Z + b'''T, \\ z &= cX + c'Y + c''Z + c'''T, \\ t &= dX + d'Y + d''Z + d'''T ; \end{aligned} \right.$$

et supposons, pour avoir une véritable transformation, que le déterminant des coefficients ne soit pas nul, de sorte que l'on peut des relations (1) tirer

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= Ax + By + Cz + Dt, \\ Y &= A'x + B'y + C'z + D't, \\ Z &= A''x + B''y + C''z + D''t, \\ T &= A'''x + B'''y + C'''z + D'''t. \end{aligned} \right.$$

Première hypothèse : *la quadrique n'est pas développable.* — Nous allons montrer qu'on peut alors choisir la transformation (1) de manière que son équation devienne

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0.$$

En effet, l'équation (3) est l'équation homogène d'une quadrique qui a pour centre l'origine des axes OX, OY, OZ, lesquels sont trois diamètres conjugués. Donc cette quadrique admet pour tétraèdre conjugué le tétraèdre formé par les faces du trièdre OXYZ et le plan de l'infini, autrement dit, par les quatre plans

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0.$$

A cause de la conservation des rapports anharmoniques, il faut donc que le tétraèdre, dont les faces sont représentées par

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + Dt &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D't &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D''t &= 0, \\ A'''x + B'''y + C'''z + D'''t &= 0, \end{aligned}$$

soit conjugué par rapport à la quadrique

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Inversement, soit un tétraèdre conjugué par rapport à cette quadrique. Faisons une transformation homographique dans laquelle les faces du tétraèdre deviennent les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini. La nouvelle quadrique admet l'origine pour centre, les axes formant un système de trois diamètres conjugués; elle a donc une équation de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + \delta T^2 = 0,$$

ce qu'on peut ramener à

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0,$$

en ayant soin de multiplier par des facteurs convenables les formes linéaires qui, dans la première figure, s'annulent sur les faces du tétraèdre conjugué. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si le lieu des points où s'annule une forme homogène à quatre variables est une quadrique non développable, ou encore si H n'est pas nul, *cette forme peut être regardée comme la somme des carrés de quatre formes linéaires indépendantes.*

Deuxième hypothèse : *la quadrique est un cône indécomposé.* — Prenons trois plans passant par le sommet du cône et formant un trièdre conjugué. Pour X, Y, Z, prenons trois formes linéaires en x, y, z, t, s'annulant sur ces trois plans, la forme T étant toujours indépendante des précédentes. Chacune des formes X, Y, Z est déterminée à un facteur constant près, et, en raisonnant comme précédemment, on voit qu'on peut choisir chacun de ces facteurs de manière que la nouvelle équation de la surface soit

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

D'où le théorème suivant :

Si le discriminant de $f(x, y, z, t)$ est nul, l'un de ses mineurs à trois rangées étant différent de zéro, cette forme quadratique équivaut à la somme des carrés de trois formes linéaires indépendantes.

TROISIÈME HYPOTHÈSE : *la quadrique se décompose en deux plans distincts.* — Prenons deux plans passant par l'intersection des plans de décomposition et conjugués harmoniques par rapport à ces derniers. Soient X et Y deux formes linéaires s'annulant dans les plans ainsi choisis : elles sont déterminées à un facteur constant près, que l'on peut choisir de manière à mettre l'équation $f = 0$ sous la forme

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

D'où le théorème suivant :

Si, le discriminant de $f(x, y, z, t)$ étant nul, son déterminant principal est d'ordre deux, la forme f équivaut à la somme des carrés de deux formes linéaires indépendantes.

QUATRIÈME HYPOTHÈSE : *la quadrique est un plan double.* — Il est alors immédiat que la forme f équivaut à un seul carré, la forme linéaire élevée au carré s'annulant dans le plan double.

En réunissant les résultats précédents, nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant :

La forme quadratique $f(x, y, z, t)$ est égale à la somme des carrés de n formes linéaires indépendantes ($n \leqslant 4$), n étant l'ordre du déterminant principal extrait du tableau des coefficients des dérivées partielles de f.

Nous allons maintenant donner une méthode pratique, due à Gauss, pour effectuer la décomposition.

243. Méthode de Gauss. — Soit la forme $f(x, y, z, t)$. Elle contient des termes en

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad t^2 \qquad \text{(termes carrés)}$$

et des termes en

$$xy, xz, xt, yz, yt, zt. \qquad \text{(termes rectangles)}$$

Supposons qu'il y ait au moins un terme carré, par exemple un terme en x^2. Alors on peut écrire

$$f \equiv ax^2 + xP_1(y, z, t) + P_2(y, z, t), \qquad (\text{avec } a \neq 0)$$

P_1 étant une forme linéaire et P_2 une nouvelle forme quadratique. On peut donc écrire

$$f \equiv a\left(x + \frac{P_1}{2a}\right)^2 + P_2 - \frac{P_1^2}{4a}.$$

De la sorte, f se présente comme la somme de deux termes :

1° le carré d'une forme linéaire en x, y, z, t, contenant sûrement un terme en x ;

2° une forme quadratique indépendante de x.

Supposons maintenant qu'il n'y ait dans f que des termes rectangles ; admettons par exemple qu'il existe un terme en xy. Nous pouvons alors écrire

$$f \equiv axy + xP_1(z, t) + yQ_1(z, t) + P_2(z, t), \qquad a \neq 0,$$

P_1 et Q_1 désignant des formes linéaires et P_2 une forme quadratique. Donc on a

$$\begin{aligned} f &\equiv a\left(x + \frac{Q_1}{a}\right)\left(y + \frac{P_1}{a}\right) + P_2 - \frac{P_1Q_1}{a} \\ &\equiv \frac{a}{4}\left(x + y + \frac{P_1 + Q_1}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x - y - \frac{P_1 - Q_1}{a}\right)^2 + P_2 - \frac{P_1Q_1}{a}. \end{aligned}$$

De la sorte, f se présente comme la somme de trois termes : les deux premiers sont les carrés de deux formes linéaires indépendantes. Le troisième est une forme quadratique indépendante de x et de y.

En appliquant plusieurs fois l'un ou l'autre des deux modes de réduction qui précèdent, on obtient une décomposition en carrés de la forme donnée. Cette méthode, facile à appliquer au point de vue du calcul, permet de distinguer rapidement une quadrique non développable, un cône, un système de plans distincts ou confondus. D'ailleurs, toutes les formes linéaires mises en jeu dans l'un et l'autre mode de décomposition sont indépendantes ; cela résulte de l'absence, dans l'une des formes obtenues, d'une ou de deux variables qui figurent dans la ou les formes que l'opération précédente avait fournies.

Remarque. — Si, conservant le point de vue projectif, on distingue les éléments réels, il y a lieu de faire précéder chaque carré d'un signe approprié. La surface n'est réelle que si tous les signes ne sont pas les mêmes. Elle est réglée si la forme f contient deux carrés positifs et deux carrés négatifs.

Nous avons annoncé que l'inégalité

$$H > 0$$

caractérise les quadriques réglées (n° 241). Nous pouvons maintenant le démontrer complètement en remarquant :

1° que l'on peut, par une transformation homographique à coefficients réels, transformer une quadrique réglée en la suivante :

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 = 0 ;$$

2° que le discriminant du premier membre de l'équation transformée est égal au produit du discriminant H, de la forme $f(x, y, z, t)$, qui s'annule sur la surface donnée, par le carré du déterminant de la transformation. En effet, en faisant dans cette forme la substitution (1), qui correspond à la transformation précédente, il vient

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 \equiv X^2 f(a, b, c, d) + \cdots \\ + XT(a'''f'_a + b'''f'_b + c'''f'_c + d'''f'_d) + \cdots \end{aligned}$$

Le nouveau discriminant peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} af'_a + bf'_b + cf'_c + df'_d & \ldots \\ a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d & \ldots \\ a''f'_a + b''f'_b + c''f'_c + d''f'_d & \ldots \\ a'''f'_a + b'''f'_b + c'''f'_c + d'''f'_d & \ldots \end{vmatrix}.$$

On peut donc le considérer comme le produit du déterminant de la transformation par le déterminant des dérivées partielles de f pour les quatre systèmes de valeurs (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d''), (a''', b''', c''', d'''). Or, ce déterminant est lui-même le produit par H du déterminant de la transformation.

Donc, pour une quadrique réglée, H a le même signe que le discriminant de la forme

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2;$$

il est donc positif. Inversement, si une quadrique est réelle, et si H est positif, le premier membre de son équation homogène contient autant de carrés positifs que de carrés négatifs. Donc cette quadrique est réglée.

244. Application de la décomposition des formes quadratiques à la classification linéaire des quadriques. — Revenons au point de vue linéaire, et proposons-nous de reconnaître la quadrique

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

On peut appliquer au premier membre le procédé de décomposition de Gauss, et le ramener à l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} &P^2 + Q^2 + R^2 + h, \\ &P^2 + Q^2 + R^2, \\ &P^2 + Q^2 + R, \\ &P^2 + Q^2 + h; \\ &P^2 + Q^2, \\ &P^2 + Q, \\ &P^2 + h, \\ &P^2, \end{aligned}$$

où P, Q, R désignent des polynomes indépendants, linéaires en x, y, z, et h une constante. En adoptant partout les coefficients $+1$ devant les carrés de P, Q, R, nous admettons qu'on n'établit pas de distinction entre les éléments réels et les éléments imaginaires. Cela posé, faisons la transformation linéaire

$$x = \mathrm{P}, \qquad y = \mathrm{Q}, \qquad z = \mathrm{R}.$$

On voit que chacune des huit formes précédentes correspond à un type unique de surfaces. Ces types sont, dans l'ordre des formes, les suivants : quadriques non développables à centre unique, cônes indécomposés, paraboloïdes, cylindres à centres, systèmes de deux plans sécants distincts, cylindres paraboliques, systèmes de deux plans parallèles distincts, plans doubles.

Si l'on se place au point de vue de la géométrie réelle, pour n'introduire dans la décomposition que des formes linéaires à coefficients réels, il faut faire précéder chaque carré d'un signe convenable. Alors, si l'on prend par exemple le cas où la décomposition fait intervenir trois carrés de polynomes linéaires et un terme constant, l'équation de la surface pourra se ramener à l'une des formes

$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2 + \alpha^2 = 0, \qquad \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2 - \alpha^2 = 0,$$
$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 - \mathrm{R}^2 - \alpha^2 = 0, \qquad \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 - \mathrm{R}^2 + \alpha^2 = 0,$$

qui correspondent aux ellipsoïdes (réel et imaginaire) et aux hyperboloïdes (à une ou deux nappes). Prenons encore le cas où la décomposition met en jeu deux carrés de polynomes linéaires et un polynome linéaire. Nous aurons à distinguer entre les formes

$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R} = 0,$$

qui correspondent respectivement au paraboloïde elliptique et au paraboloïde hyperbolique.

245. Passage de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle. — Laissant à l'élève le soin de faire le raisonnement pour une conique, nous nous bornerons à exposer la question pour les quadriques. Soit

$$f(x, y, z, t) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy$$
$$+ 2t(\mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z) + \mathrm{D}t^2 = 0.$$

Pour que le plan de coefficients u, v, w, r soit tangent à cette surface au point (x, y, z, t), il faut et il suffit qu'on ait simultanément

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$
$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r}.$$

Appelons 2λ la valeur commune de ces rapports. Le système précédent peut se remplacer par le suivant :

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + Ct - \lambda u &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C't - \lambda v &= 0, \\ B'x + By + A''z + C''t - \lambda w &= 0, \\ Cx + C'y + C''z + Dt - \lambda r &= 0, \\ ux + vy + wz + rt &= 0, \end{aligned}$$

qui doit admettre des solutions en x, y, z, t, λ, telles que λ ne soit pas nul et que les quatre nombres x, y, z, t ne soient pas tous nuls. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Inversement, supposons cette condition remplie et distinguons deux cas :

1° Si H n'est pas nul, c'est-à-dire si la quadrique n'est pas développable, on peut prendre H comme déterminant principal des cinq équations précédentes. Donc, d'après le théorème de Rouché, on peut choisir arbitrairement λ dans les quatre premières équations. Les valeurs de x, y, z, t, tirées de celles-ci, vérifieront la dernière, puisque le caractéristique est nul, en vertu de (1). La condition est alors suffisante : c'est l'équation tangentielle de la surface.

2° Si H est nul, l'un de ses mineurs à trois rangées n'étant pas nul, la quadrique est un cône véritable. Soient x_0, y_0, z_0, t_0 les coordonnées de son sommet. Les quatre premières équations ne sont compatibles en x, y, z, t pour une valeur λ non nulle, que si l'on a (1)

$$(2) \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 + rt_0 = 0.$$

Si la condition (2) est remplie, on peut tirer x, y, z, t des quatre premières équations, les valeurs ainsi obtenues contenant outre λ, une autre indéterminée (géométriquement, cela correspond au fait que le contact a lieu, non plus en un seul point, mais le long d'une droite). Si, en outre, la condition (1) est vérifiée, ces valeurs de x, y, z, t, λ qui vérifient les quatre premières équations satisfont à la cinquième. Les conditions (1) et (2) sont donc nécessaires et suffisantes au contact du plan. Dans ce cas, la surface possède en définitive deux équations tangentielles.

---

(1) Multiplier les quatre premières équations par x_0, y_0, z_0, t_0 et ajouter en tenant compte de $f'_{x_0} = f'_{y_0} = f'_{z_0} = f'_{t_0} = 0$ et de la réciprocité de la forme polaire.

REMARQUE. — Dans ce second cas, la condition (1) n'est pas satisfaite identiquement. L'élève s'en rendra compte en cherchant par exemple dans son premier membre les coefficients de u^2 ou de $2uv$ et en montrant que chacun d'eux est un mineur à trois rangées de H.

246. Revenons au cas général où H n'est pas nul. Puisque H est symétrique par rapport à sa diagonale principale, il en est de même du déterminant ayant pour élément de la p^e ligne et de la q^e colonne le coefficient de l'élément correspondant de H, dans le développement de H par rapport aux termes de la p^e ligne. Ce nouveau déterminant s'appelle l'*adjoint* de H : en formant son produit par H, on trouve que sa valeur est H^3. Grâce à la symétrie du déterminant adjoint par rapport à sa diagonale principale, nous pouvons l'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta'' & \beta & \gamma \\ \beta'' & \alpha' & \beta & \gamma' \\ \beta' & \beta & \alpha'' & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \delta \end{vmatrix}.$$

Reprenons le système de nos cinq équations et résolvons-les en x, y, z, t. Dans ce calcul, supposons $\lambda = 1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{H}x &= \alpha u + \beta'' v + \beta' w + \gamma r, \\ \mathrm{H}y &= \beta'' u + \alpha' v + \beta w + \gamma' r, \\ \mathrm{H}z &= \beta' u + \beta v + \alpha'' w + \gamma'' r, \\ \mathrm{H}t &= \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w + \delta r. \end{aligned}$$

Cela posé, les seconds membres sont les demi-dérivées partielles de la forme quadratique

$$\psi \equiv \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv + 2\gamma ru + 2\gamma' rv + 2\gamma'' rw + \delta r^2,$$

qui, en vertu de l'identité d'Euler et des relations précédentes, est identique à

$$\mathrm{H}(ux + vy + wz + rt).$$

Donc, en égalant cette forme à zéro, nous obtenons l'équation tangentielle de la quadrique.

Nous voyons qu'il y a réciprocité entre la forme $f(x, y, z, t)$ du premier membre de l'équation ponctuelle et la forme $\frac{\psi(u, v, w, r)}{\mathrm{H}}$, qui prennent la même valeur

$$ux + vy + wz + rt,$$

lorsqu'on associe un plan tangent u, v, w, r et son point de contact. On leur donne le nom de *formes adjointes*. Nous proposons, comme exercice, de montrer que leurs discriminants sont inverses.

III. — Notions générales relatives à la détermination des figures.

247. Énumération des conditions d'un problème. — Tant qu'on se borne à étudier la géométrie élémentaire, les problèmes qui consistent à déterminer certaines figures par des conditions données paraissent difficiles. Il est embarrassant de formuler, en vue de leur résolution, des règles générales. La géométrie analytique permet de ramener toutes ces questions à des systèmes d'équations.

Supposons qu'on cherche une ligne ou une surface, de nature déterminée, sachant qu'elle est soumise à un certain nombre de conditions géométriques. La première recherche à entreprendre, c'est de voir à combien de relations indépendantes équivaut l'ensemble de ces conditions. Suivant que ce nombre est supérieur, égal, ou inférieur à celui des paramètres dont dépend la ligne ou la surface, les données sont surabondantes, suffisantes ou incomplètes. Lorsqu'il y a autant d'équations que d'inconnues, on dit que le problème est *bien posé* ; en en le résolvant, on obtient l'élément géométrique cherché.

Mais bien souvent, on peut se dispenser d'écrire ces équations et de les résoudre, et présenter la solution du problème en utilisant exclusivement les propositions de la géométrie pure. Cette solution, qui peut échapper à qui ne connaît que les huit livres d'Euclide, s'obtient maintenant par une méthode logique.

Raisonnons, pour fixer les idées, en géométrie plane, et supposons qu'en exprimant chaque condition du problème, nous obtenions une seule relation d'égalité. Soit n le nombre des conditions. Supposons que $n-1$ d'entre elles soient simultanément remplies : la figure considérée n'est plus déterminée. L'un de ses points, distingué à l'aide d'une propriété quelconque, mais choisi de manière à faciliter, autant que possible, la détermination de la figure [1], décrit une certaine ligne. En associant de deux manières $n-1$ des conditions données, on obtient deux lignes, à l'intersection desquelles se trouve le point cherché.

Ou bien, et c'est le point de vue corrélatif du précédent, on pourra distinguer une droite de la figure cherchée et essayer de déterminer cette droite comme la tangente commune à deux courbes, dont chacune est son enveloppe lorsqu'on associe seulement $n-1$ des conditions données.

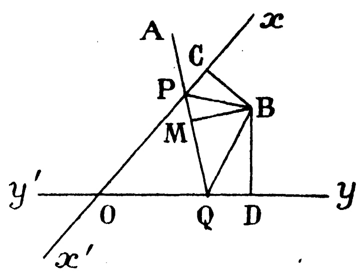
Prenons un exemple particulièrement simple. Soit à mener, d'un

---

[1] Par exemple, si l'on demande de trouver un cercle remplissant certaines conditions, on en cherche le centre.

point donné A, une droite coupant deux droites données $x'x$ et $y'y$ en des points P et Q tels que, B étant un point donné, l'angle PBQ ait une valeur donnée.

Cherchons à déterminer la droite APQ elle-même. Il nous faut pour cela deux conditions. Or l'énoncé lui impose :



1° de passer par le point A ;

2° d'être telle que l'angle PBQ ait une valeur donnée.

Or, quand on exprime seulement cette deuxième condition, on assujettit PQ à envelopper une conique de foyer B, tangente à Ox et Oy : en effet P et Q se correspondent homographiquement sur ces droites (voyez n° 185), en outre les tangentes menées de B correspondent aux rayons doubles des faisceaux engendrés par BP, BQ, et, par suite, sont isotropes.

Le problème peut donc se ramener à construire une tangente à cette conique passant par A. Mais on peut aussi, et cela nous fait revenir au premier mode de résolution, essayer de déterminer un second point de la droite APQ, par exemple la projection orthogonale de B sur cette droite, soit M. Lorsqu'on exprime seulement la première condition, on assujettit M à décrire le cercle de diamètre AB ; en exprimant la seconde, on impose à M de décrire le cercle principal de la conique. Le point M doit donc se trouver à l'intersection de ces deux cercles.

S'agit-il maintenant de présenter la solution indépendamment de toute considération d'homographie, et de la rendre accessible à un lecteur qui ne connaît que les deux premiers livres d'Euclide? On fera voir directement que l'angle PBQ restant constant, la projection de B sur PQ doit décrire un cercle. Par quelle méthode? Ce cercle doit passer par les projections C et D de B sur $x'x$ et $y'y$. Tout revient donc à démontrer la constance de l'angle CMD, que le lecteur déduira aisément de la considération des quadrilatères inscriptibles BCPM, BDQM.

Tous les problèmes ne se traitent pas aussi simplement que le précédent. Mais cet exemple montre bien la supériorité que donne au chercheur la connaissance des méthodes analytiques, même si on lui demande de développer une solution en s'en tenant aux propositions de la géométrie pure.

248. Il importe donc de préciser la notion de condition : nous dirons qu'une condition géométrique est *simple, double, triple, ...* sui-

vant qu'elle s'exprime par une, deux, trois, ... relations entre les paramètres dont dépend l'élément géométrique cherché. Le fait, pour une courbe, de passer par un point donné constitue une condition qui est simple dans le plan et double dans l'espace ; en effet, dans le premier cas, la courbe est définie par une équation ; le fait qu'elle passe par un point donné établit une seule relation entre ses coefficients ; dans le second, la courbe est définie par deux équations ; en écrivant qu'elle passe par un point donné, on obtient donc deux relations. De même, en imposant à une surface de passer par un point donné, on lui impose une condition simple.

On verra pareillement qu'on impose à une courbe du plan xOy :

1° une condition simple si on l'assujettit à être tangente à une droite donnée ;

2° une condition double si on veut qu'elle soit tangente à une droite donnée en un point donné ;

3° une condition triple si on lui impose d'être osculatrice en un point donné à une ligne donnée, etc.

Si l'on veut qu'une surface soit tangente à un plan donné, on exprime une condition simple si la surface n'est pas développable, une condition double si elle est développable. Le fait d'être tangente à un plan donné en un point donné constitue pour la surface une condition triple, etc.

Toutes les conditions que nous venons d'énumérer sont des conditions du type projectif. Lorsque le problème donné ne met en jeu que des conditions du type projectif, il appartient lui-même au type projectif, et on peut alors le résoudre par des constructions projectives. Mais il va sans dire qu'il y a aussi des conditions du type linéaire et des conditions du type métrique.

En exprimant qu'un point est centre d'une conique, on exprime une condition du type linéaire ; en exprimant qu'il est foyer, on a une condition métrique. Chacune de ces deux conditions est d'ailleurs double. En effet, le centre et les foyers sont déterminés quand la conique est donnée. Par suite, leurs coordonnées sont des fonctions connues des coefficients. On obtient donc deux relations entre ceux-ci, lorsqu'on écrit qu'un point donné est centre, ou foyer. On obtiendra de même deux relations, en exprimant qu'une droite donnée est directrice ou axe, trois en écrivant qu'un cercle donné est cercle directeur ou cercle principal, etc... L'élève montrera de même que le fait qu'un point donné est centre ou sommet d'une quadrique équivaut à trois conditions, qu'imposer à un cercle d'être section centrale d'une quadrique équivaut à six conditions, etc... En général, soient un point, une ligne, ou une surface qui sont déterminés dès qu'une conique ou une quadrique se trouve donnée. On dit que ce point, cette ligne ou cette sur-

face constitue un ***élément remarquable*** de la conique ou de la quadrique. Soit p le nombre de paramètres nécessaires à la détermination de cet élément ; la donnée de cet élément pour une conique ou une quadrique impose à celle-ci une condition d'ordre p [1].

Donnons encore quelques exemples. Si l'on veut qu'une quadrique passe par une droite donnée, cela équivaut à trois relations entre ses coefficients : en effet, il faut et il suffit que trois points de la droite se trouvent sur la quadrique pour que cette droite y soit contenue tout entière. Si l'on impose à une quadrique de contenir deux droites données, cette condition est sextuple si les deux droites sont des génératrices de même système, quintuples si elles sont de systèmes différents. Ceci nous montre, en passant, que si une condition A est d'ordre p et une condition B d'ordre q, l'ensemble des conditions A et B n'est pas forcément d'ordre $p+q$.

Nous dirons qu'une condition est *linéaire* lorsqu'elle se traduit par une ou plusieurs relations linéaires entre les paramètres qui figurent dans la ou les équations de la ligne ou de la surface, ceux-ci étant supposés eux-mêmes intervenir linéairement dans cette ou ces équations.

IV. — Détermination des coniques.

249. Conique passant par cinq points. — L'équation générale des coniques du plan xOy est

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxt+2Eyt+Ft^2=0.$$

Elle contient, d'une façon linéaire et homogène, les six paramètres A, B, C, D, E, F. Si l'on assujettit les coefficients à vérifier cinq relations linéaires et homogènes indépendantes, la conique sera déterminée. Toutefois, il pourra arriver qu'elle se décompose en deux droites, au nombre desquelles la droite de l'infini pourra figurer.

Sans chercher, pour le moment, la signification géométrique de la condition linéaire la plus générale imposée à une conique, remarquons

---

(1) Plaçons-nous au point de vue de la géométrie métrique à trois dimensions. Toutes les figures égales à une figure donnée dépendent de six paramètres ; en effet, soit O_1 un point remarquable de l'une d'elles et O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 trois droites remarquables formant un trièdre trirectangle issu de ce point. Ce trièdre, et par suite la position de la figure, sont bien déterminés si l'on connaît les coordonnées de O_1 et les trois angles d'Euler. Pour cette raison, on donne à ces six quantités le nom de *paramètres de position*. Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ étant connu, il faut, pour achever de déterminer la figure, donner la valeur d'un certain nombre d'autres paramètres, qu'on nomme *paramètres de grandeur*. On voit ainsi que les ellipsoïdes dépendent de neuf paramètres, six paramètres de position et trois de grandeur.

qu'on obtient une condition de cette nature lorsqu'on exige que la courbe passe par un point donné, ou soit conjuguée par rapport à deux points donnés.

Étudions *le cas où l'on donne cinq points de la conique.*

Si parmi ces cinq points, il est impossible d'en trouver trois en ligne droite, on ne peut mener par eux plus d'une conique, sinon nous aurions, contrairement au théorème du n° 86, deux courbes du second ordre indécomposées, ayant plus de quatre points communs. D'ailleurs le système des cinq équations

$$\begin{array}{l} Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1t_1 + 2Ey_1t_1 + Ft_1^2 = 0, \\ Ax_2^2 + \cdots\cdots\cdots + Ft_2^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_5^2 + \cdots\cdots\cdots + Ft_5^2 = 0, \end{array}$$

admet des solutions non toutes nulles en A, B, C, D, E, F. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si cinq points sont tels qu'aucune droite ne contienne trois d'entre eux, il passe par ces cinq points une conique et une seule.

Pour qu'un point (x, y, t) soit sur cette conique, il faut et il suffit que le système formé par les cinq équations précédentes et la suivante

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2 = 0$$

admette des solutions non toutes nulles en A, B, C, D, E, F. L'équation de la conique est donc

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & tx & ty & t^2 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & t_1x_1 & t_1y_1 & t_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & t_2x_2 & t_2y_2 & t_2^2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & t_3x_3 & t_3y_3 & t_3^2 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & t_4x_4 & t_4y_4 & t_4^2 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & t_5x_5 & t_5y_5 & t_5^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — Supposons que, parmi les cinq points, trois soient en ligne droite, les deux autres se trouvant en dehors de cette droite. Toute conique passant par ces points comprend la droite précédente et la droite joignant les deux autres points. Le problème a donc encore une solution unique.

Par contre, si quatre de nos points sont sur une droite, la conique comprend cette droite, et une autre, indéterminée, passant par le cinquième point.

250. Cas limites du problème précédent. — On peut supposer qu'un certain nombre des points donnés viennent se confondre. On ob-

tient ainsi des problèmes qui sont des cas limites du précédent, et qui s'en déduisent :

1° en remplaçant la donnée de deux des points par le fait que la courbe est tangente en un point donné à une droite donnée ;

2° en remplaçant la donnée de trois points par celle d'une courbe osculatrice en un point donné à la conique cherchée ;

3° en remplaçant la donnée de quatre points par celle d'une courbe surosculatrice en un point donné à la conique.

Il va sans dire, et nous laissons au lecteur le soin de le vérifier, que ces nouvelles données, remplaçant celle d'un certain nombre de points, équivalent à autant de conditions linéaires simples.

251. Détermination d'un cercle. — Si l'on écrit qu'une conique est un cercle, on lui impose deux conditions linéaires, à savoir de passer par chacun des points cycliques. Donc, pour déterminer un cercle, il suffit de lui imposer trois conditions linéaires indépendantes des précédentes, par exemple de passer par trois points donnés à distance finie ; ces points déterminent un véritable cercle, s'ils ne sont pas alignés. Plus généralement, cherchons à déterminer un cercle par trois conditions linéaires quelconques, et étudions la signification de chacune d'elles. Soit le cercle

$$(1) \qquad A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Une relation linéaire et homogène entre A, B, C, D *exprime que ce cercle est orthogonal à un cercle ou à une droite fixe.*

En effet, si nous voulons exprimer l'orthogonalité du cercle (1) et du cercle

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0,$$

nous devons exprimer que le carré de la distance des centres est la somme des carrés des rayons, ce qui donne

$$2(bB+cC)-aD-dA=0 ;$$

les paramètres a, b, c, d étant indépendants, le résultat annoncé est vérifié.

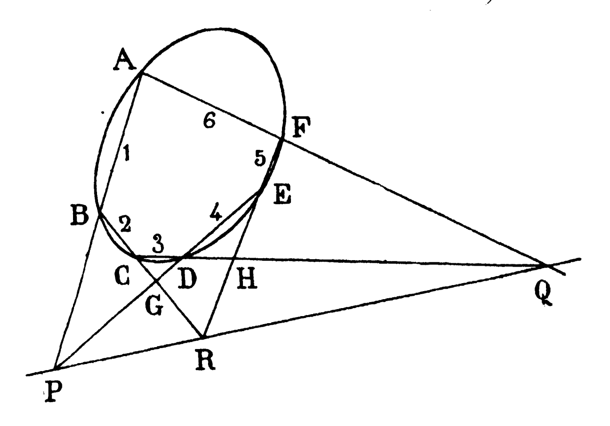
La détermination d'un cercle par trois conditions linéaires équivaut donc à la recherche du cercle orthogonal à trois cercle donnés.

252. Cas de données surabondantes : théorème de Pascal. — Puisque cinq conditions linéaires déterminent une conique, un système de plus de cinq conditions sera en général incompatible. Il n'existera de conique satisfaisant à un tel système que si

toutes les conditions considérées sont des combinaisons linéaires de cinq d'entre elles.

Par exemple, six points ne sont situés sur une courbe du second ordre que moyennant une condition. D'après l'exemple donné au n° 117, on peut l'énoncer en disant que les deux faisceaux de droites obtenus en joignant quatre de ces points à chacun des deux autres doivent posséder le même rapport anharmonique. On peut aussi lui donner la forme suivante, qui constitue le théorème de Pascal :

Si l'on joint ces points deux à deux, de manière à former un hexagone, il faut et il suffit qu'en numérotant les côtés de celui-ci, les points de rencontre des côtés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 soient alignés.



En effet, pour que A, B, C, D, E, F soient sur une conique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(B\,.\,ACDE) = (F\,.\,ACDE).$$

Soient P le point commun à 1 et 4, Q le point commun à 3 et 6. Nous devons avoir sur les sécantes 4 et 3 :

$$(PGDE) = (QCDH).$$

Ces deux divisions homographiques, de bases 3 et 4, qui admettent comme points homologues P et Q, G et C, E et H, ont en commun le point homologue D. Donc les droites PQ, GC et EH sont concourantes, ce qui revient à dire que 2 et 5 se coupent en un point R de la droite PQ (C. q. f. d.).

Du théorème de Pascal, on peut déduire d'autres propositions, en supposant que deux des sommets consécutifs de l'hexagone viennent à se confondre, et en substituant à la droite qui les joint la tangente vers laquelle elle tend lorsque les points sont infiniment voisins.

Comme exercice, nous proposons au lecteur, une conique étant déterminée par cinq points A, B, C, D, E, d'en déduire au moyen de la règle, une infinité d'autres points. Par E on mènera une droite arbitraire, et on déterminera son second point F de rencontre avec la courbe en utilisant le théorème de Pascal. Faire aussi la construction en supposant donnés trois points et les tangentes en deux de ces points.

253. Indétermination d'ordre un : faisceaux ponctuels. — Si l'on impose à une conique quatre conditions linéaires, son équation contient encore deux paramètres, figurant d'une façon linéaire et homogène. Soient

$$f(x, y, t) = 0, \qquad g(x, y, t) = 0$$

deux coniques distinctes remplissant les quatre conditions données. Toutes les autres sont nécessairement de la forme

$$(1) \qquad \alpha f(x, y, t) + \beta g(x, y, t) = 0,$$

ou, en introduisant le rapport $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$,

$$f(x, y, t) + \lambda g(x, y, t) = 0.$$

On dit qu'elles forment un *faisceau ponctuel*. Nous avons déjà signalé, au n° 129, la correspondance involutive qui existe entre les deux points où chacune de ces coniques rencontre une droite fixe. Cette propriété constitue le théorème de Desargues.

Cherchons à caractériser, au point de vue géométrique, un faisceau ponctuel. Il est clair que toute conique représentée par l'équation (1) passe par les points communs à

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad g = 0.$$

Inversement, toute conique passant par ces quatre points est susceptible d'être représentée par une équation de la forme (1). En effet, prenons sur cette courbe un cinquième point (x_0, y_0, t_0). On peu déterminer des valeurs α_0, β_0 de α, β, telles que la conique

$$\alpha_0 f(x, y, t) + \beta_0 g(x, y, t) = 0$$

passe en ce cinquième point, et par suite se confonde avec la conique considérée. On peut donc dire que l'équation (1) est l'équation générale des coniques qui passent par les points communs aux deux coniques

$$f(x, y, t) = 0, \qquad g(x, y, t) = 0.$$

Nous venons de supposer implicitement que ces deux courbes se coupaient en quatre points distincts. Mais il est clair que si un poin

compte pour deux, trois ou quatre unités dans leur intersection, il comptera pour le même nombre d'unités dans l'intersection d'une de ces coniques avec la conique (1). D'une manière générale, on peut donc dire que l'équation (1) est l'équation générale des coniques ayant en commun avec la conique $f=0$, et au même ordre de multiplicité, les mêmes points que la conique $g=0$.

Applications. — 1° Soit un quadrilatère, dont les côtés opposés ont pour équations, d'une part

$$P=0, \qquad Q=0;$$

d'autre part

$$R=0, \qquad S=0.$$

En remarquant que chaque couple de côtés opposés constitue une conique décomposée passant par les quatre sommets, on voit que l'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère peut s'écrire

$$PQ+\lambda RS=0.$$

2° Soit une conique indécomposée (f) [1], d'équation

$$f(x, y, t)=0,$$

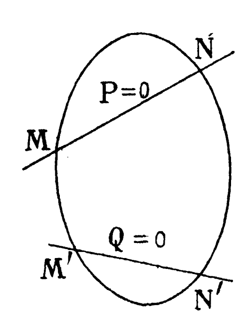
et deux droites sécantes MN et M′N′, d'équations

$$P=0, \qquad Q=0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points de rencontre M, N, M′, N′ de (f) et des deux droites est

$$f+\lambda PQ=0.$$

3° Si M′ tend vers M, la conique précédente devient tangente à (f) au point M. Si, en même temps, N′ tend vers N, la droite $Q=0$ tend vers la droite $P=0$, et le système des coniques considérées devient celui des coniques bitangentes à (f) en M et N. Donc, *l'équation générale des coniques bitangentes à la conique $f=0$ aux points où elle coupe la droite $P=0$ est*



$$f+\lambda P^2=0.$$

4° Supposons que M′ et N′ tendent simultanément vers M. La droite $Q=0$ tend vers la tangente en M, et, à la limite, notre équation représente les coniques

(1) Dans la suite, il nous arrivera souvent d'appeler, pour abréger, conique (f), celle qui a pour équation $f=0$.

qui coupent (f) en N et lui sont *osculatrices* en M. Elle devient alors

$$f(x, y, t) + \lambda P(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + tf'_{t_0}) = 0,$$

x_0, y_0, t_0 représentant les coordonnées de M, et la forme linéaire P s'annulant en ce point.

5° Enfin, partant du cas d'osculation, ou du cas de bitangence, et faisant tendre N vers M, on obtient l'équation générale des coniques qui sont surosculatrices en M à la conique $f = 0$, soit,

$$f(x, y, t) + \lambda(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + tf'_{t_0})^2 = 0.$$

254. Conséquences du théorème de Desargues. — Coupons le faisceau par une droite D, qui ne passe par aucun des points communs aux deux coniques $f = 0$ et $g = 0$, et considérons l'involution qui lie les points où elle coupe une conique quelconque du faisceau. Cette involution a deux points doubles : ils sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau. Ces points sont manifestement les points communs à la droite D et à celles de ces coniques qui la coupent en deux points confondus, c'est-à-dire qui sont ou tangentes à D, ou décomposées, ayant un point d'ordre deux sur D.

En déduire, comme exercice, que dans un faisceau ponctuel il y a, en général, deux paraboles. Montrer que si toutes les coniques du faisceau sont des paraboles, elles ont leurs axes parallèles.

Quand on impose à une conique du faisceau d'être conjuguée par rapport à deux points donnés, on l'astreint à une cinquième condition linéaire, qui achève, en général, de la déterminer. Il n'y a exception que si les deux points donnés coïncident avec les points doubles de l'involution que déterminent les coniques du faisceau sur la droite qui les joint. La condition supplémentaire n'est alors qu'une dépendance des quatre qui ont été écrites pour exprimer que les coniques considérées forment un faisceau.

Exemple. — Supposons que les deux points donnés soient les points cycliques. Une conique conjuguée par rapport à ces points est une hyperbole équilatère. Donc, dans un faisceau, il y a en général une seule hyperbole équilatère. S'il y en a deux, les points cycliques sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau, qui sont donc des hyperboles équilatères. Considérons les hyperboles équilatères passant par trois points fixes A, B, C. Nous avons une famille de coniques soumises à quatre conditions linéaires. Donc, elles forment un faisceau, et, par suite, passent par un quatrième point fixe. En considérant les hyperboles du faisceau réduites à un côté du triangle ABC et à la hauteur correspondante, on voit immédiatement que ce quatrième point est l'orthocentre de ce triangle.

Soit un point P : appelons Q l'intersection de ses polaires par rapport à deux coniques du faisceau. Les points P et Q, conjugués par rapport à deux coniques du faisceau, le sont par rapport à toutes ces coniques. D'où ce théorème :

Les polaires d'un point P *par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel passent par un point fixe* Q. *Il y a réciprocité entre* P *et* Q.

Notre raisonnement montre de plus que si le point P a même polaire par rapport à deux coniques, il a aussi même polaire par rapport à toute conique du faisceau qu'elles déterminent.

Cherchons analytiquement la condition pour qu'il en soit ainsi. Pour que le point P (x_0, y_0, t_0) ait même polaire par rapport à $f=0$ et $g=0$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre λ_0 tel qu'on ait

$$f'_{x_0} + \lambda_0 g'_{x_0} = 0, \qquad f'_{y_0} + \lambda_0 g'_{y_0} = 0, \qquad f'_{t_0} + \lambda_0 g'_{t_0} = 0,$$

ce qui revient à dire que P_0 doit être un point d'ordre deux d'une conique décomposée du faisceau ; nous sommes donc amenés à étudier ces coniques décomposées.

255. Coniques décomposées d'un faisceau ponctuel. — Supposons que le faisceau considéré soit l'ensemble des coniques ayant en commun quatre points distincts M, N, M′, N′. Il est évident géométriquement qu'il existe trois coniques décomposées, formées par les systèmes de droites

$$\mathrm{MN},\ \mathrm{M'N'}; \qquad \mathrm{MM'},\ \mathrm{NN'}; \qquad \mathrm{MN'},\ \mathrm{M'N}.$$

Soit maintenant un faisceau quelconque, dont l'une des coniques a pour équation

$$f + \lambda g = 0,$$

avec

$$f = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''t^2 + 2\mathrm{B}yt + 2\mathrm{B}'tx + 2\mathrm{B}''xy = 0,$$
$$g = \mathrm{A}_1x^2 + \mathrm{A}'_1y^2 + \mathrm{A}''_1t^2 + 2\mathrm{B}_1yt + 2\mathrm{B}'_1tx + 2\mathrm{B}''_1xy = 0.$$

Pour qu'une conique du faisceau soit décomposée, il faut et il suffit que la valeur correspondante de λ vérifie la relation

$$\mathrm{F}(\lambda) = \begin{vmatrix} \mathrm{A} + \lambda\mathrm{A}_1 & \mathrm{B}'' + \lambda\mathrm{B}''_1 & \mathrm{B}' + \lambda\mathrm{B}'_1 \\ \mathrm{B}'' + \lambda\mathrm{B}''_1 & \mathrm{A}' + \lambda\mathrm{A}'_1 & \mathrm{B} + \lambda\mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}' + \lambda\mathrm{B}'_1 & \mathrm{B} + \lambda\mathrm{B}_1 & \mathrm{A}'' + \lambda\mathrm{A}''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous supposons que la conique $g=0$ n'est pas décomposée[1],

[1] Sinon, le degré s'abaisserait; il pourrait même arriver que l'équation se réduise à une identité. C'est ce qui se produit si $f=0$ et $g=0$ représentent deux coniques ayant en commun soit un point d'ordre deux, soit une droite.

nous avons une équation du troisième degré en λ, qui, développée, s'écrit

$$F(\lambda) = \Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta_1 + \lambda^3\Delta_1,$$

Δ et Δ_1 désignant les discriminants des formes quadratiques f et g. Quant à Θ, il a pour valeur $F'(0)$: appliquons le théorème de dérivation d'un déterminant et utilisons les notations α, β,.... introduites au n° 246, pour désigner les éléments du déterminant adjoint de Δ. Nous obtenons

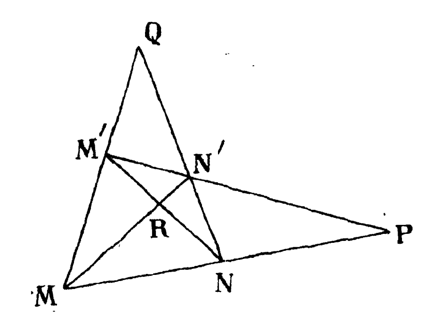
$$\Theta = A_1\alpha + A'_1\alpha' + A''_1\alpha'' + 2B_1\beta + 2B'_1\beta' + 2B''_1\beta''.$$

On voit facilement que Θ_1 se déduit de Θ en permutant le rôle des coniques (f) et (g). Donc

$$\Theta_1 = A\alpha_1 + A'\alpha'_1 + A''\alpha''_1 + 2B\beta_1 + 2B'\beta'_1 + 2B''\beta''_1.$$

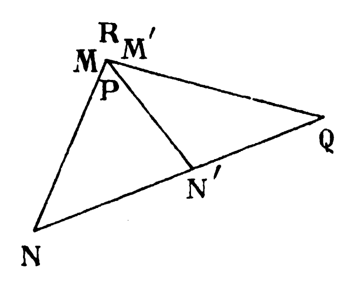
Indiquons rapidement la relation qui existe entre le fait que *l'équation en* λ possède une racine multiple, et celui que les deux coniques (f) et (g) viennent à être tangentes, bitangentes, osculatrices ou surosculatrices.

A cet effet, remarquons que $F'(\lambda)$ est la somme d'un certain nombre de mineurs de $F(\lambda)$. Donc un zéro simple de $F(\lambda)$ n'annule pas tous ses mineurs, et par suite fournit une conique du faisceau, composée de deux droites distinctes. En particulier, si les trois racines de $F(\lambda)$ sont distinctes, nous retrouvons les trois couples de sécantes communes, indiqués au début du paragraphe. Soient P, Q, R les points d'ordre deux de chaque couple. Ces points sont seuls susceptibles d'avoir même polaire par rapport à deux de nos coniques. Deux d'entre eux sont les points doubles de l'involution de Desargues sur la droite qui les joint, et par suite sont conjugués par rapport à toutes nos coniques. Le triangle PQR est donc conjugué par rapport à toutes les coniques du faisceau. Il est d'ailleurs le seul à posséder cette propriété.



Une racine double de l'équation en λ peut donner lieu à deux circonstances différentes. Ou bien, elle n'annule pas tous les mineurs de $F(\lambda)$; deux des couples de sécantes communes viennent alors se confondre, mais de façon que chaque couple reste formé de deux droites distinctes. Ce cas est donc un cas limite du précédent, celui où les coniques se coupent en N et N' et sont tangentes en M.

Ou bien la racine double annule tous les mineurs de $F(\lambda)$. Alors, un couple de sécantes communes est formé d'une droite double. Si l'on veut obtenir ce cas comme cas limite du cas général, il faut supposer que la figure varie de manière que la droite M'N' tende vers la droite MN [nous supposons fixe cette droite et la conique (f)], ou que M' et N' tendent respectivement vers M et N. Ce cas est donc celui des coniques bitangentes. Il y a alors une infinité de triangles conjugués communs aux deux coniques. Tous ont pour sommet le pôle de la corde des contacts, les deux autres sommets étant deux points conjugués de cette corde.



Une racine triple de l'équation en λ ne se présente que si les coniques (f) et (g) sont osculatrices ou surosculatrices. Les trois couples de sécantes communes sont alors confondus. Le couple triple comprend dans le cas de l'osculation deux droites distinctes passant par le point d'osculation, dont l'une est tangente en O, et dans le cas de la surosculation deux droites confondues avec cette tangente.

256. Questions diverses. — 1° *Lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel.*

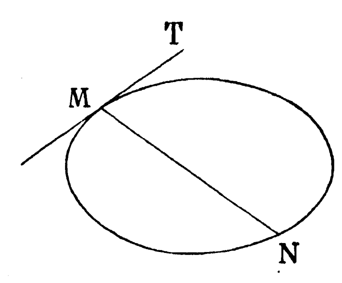
Le pôle d'une droite fixe par rapport à une conique du faisceau ést l'intersection des polaires de deux points fixes de cette droite. Or ces polaires se correspondent homographiquement quand λ varie. En appliquant cette remarque au cas où la droite donnée est la droite de l'infini, on voit que le lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel est une conique. Si le faisceau est formé par les coniques passant par les quatre sommets M, N, M', N' d'un quadrilatère, le lieu des centres passe manifestement par les sommets P, Q, R du triangle conjugué, et aussi, le lecteur le montrera, par les milieux des segments joignant deux à deux les quatre points donnés. Quand l'un des sommets du quadrilatère est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, toutes les coniques sont des hyperboles équilatères, et l'application du résultat précédent montre que le lieu de leurs centres est le cercle des neuf points du triangle formé par trois des points fixes. Nous laissons au lecteur le soin de voir à quoi se réduit le lieu des centres lorsque les coniques données sont bitangentes ou surosculatrices (n° 261).

2° *Condition pour qu'un faisceau contienne un cercle.*

L'élève traitera cette question comme exercice et montrera que les deux coniques $f=0$ et $g=0$ doivent avoir mêmes directions prin-

cipales. En particulier, les deux paraboles du faisceau ont alors leurs axes rectangulaires, et la conique lieu des centres est une hyperbole équilatère.

On déduit de la proposition précédente une construction du cercle osculateur en un point M d'une ellipse différent d'un sommet. En appelant N le second point de rencontre de ce cercle avec l'ellipse, on remarque que les bissectrices des angles des droites MT, MN doivent être parallèles aux axes de l'ellipse.



Si un faisceau contient deux cercles, toutes les coniques du faisceau sont des cercles, et on retombe dans la théorie des faisceaux de cercles, développée au n° 125.

257. Indétermination d'ordre deux : réseaux ponctuels de coniques. — Lorsqu'on assujettit les coefficients de l'équation d'une conique à vérifier trois relations linéaires et homogènes, on obtient une famille représentée par une équation de la forme

$$\alpha f(x, y, t) + \beta g(x, y, t) + \gamma h(x, y, t) = 0,$$

qui contient en réalité deux paramètres, par exemple les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$. On dit que de telles coniques forment un réseau ; (f), (g), (h) en sont des coniques particulières.

Prenons par exemple toutes les coniques passant par trois points fixes. Soient

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

les équations des droites qui joignent ces points deux à deux. Trois des coniques du réseau sont

$$f = QR = 0, \qquad g = RP = 0, \qquad h = PQ = 0.$$

L'équation générale des coniques cherchées est donc

$$QR + \lambda RP + \mu PQ = 0.$$

Dans le réseau de coniques le plus général, les trois coniques (f), (g), (h) n'ont pas de point commun ; il n'y a donc pas de points fixes apparten nt à toutes ces courbes, et l'exemple précédent n'est qu'un cas particulier. Si f, g, h ont en commun p points fixes ($p < 4$), ces points appartiennent à toutes les courbes de la famille. Prenons par exemple les cercles orthogonaux à un cercle fixe. Ils forment un réseau. Tous les cercles de la famille passent alors par les deux points cycliques ($p = 2$).

258. Théories corrélatives des précédentes. — Au lieu de partir de l'équation ponctuelle d'une conique, on peut considérer son équation tangentielle et chercher l'effet d'un certain nombre de conditions linéaires imposées à ses coefficients. Les propositions qu'on obtient se déduisent de celles qui ont été établies dans les numéros précédents, par une transposition du type qui a été indiqué au n° 184. Par exemple :

Il existe une conique et une seule, indécomposée, tangente à cinq droites, dont trois ne passent pas par un même point.

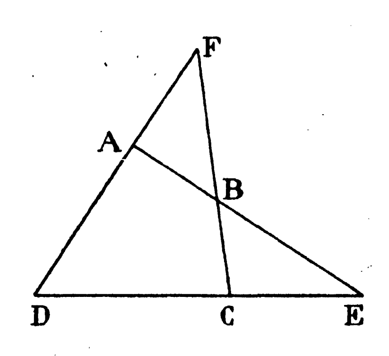
Pour que six droites soient tangentes à une conique, il faut et suffit qu'en numérotant 1, 2, 3, 4, 5, 6 *les points de rencontre de chaque droite avec la suivante, les droites joignant les points* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6 *soient concourantes.*

Les coniques qui ont une équation tangentielle de la forme

$$f(u, v, w) + \lambda g(u, v, w) = 0$$

constituent un *faisceau tangentiel.* Dans le cas général, on peut les regarder comme l'ensemble des coniques tangentes à quatre droites fixes, à savoir les quatre tangentes communes aux deux courbes représentées tangentiellement par $f = 0$, $g = 0$.

Les tangentes menées d'un point fixe aux coniques d'un faisceau tangentiel se correspondent par involution. Par un point du plan, il passe donc deux coniques d'un faisceau tangentiel, ayant pour tangentes les rayons doubles des faisceaux involutifs ayant pour sommet ce point, et engendrés par les tangentes qu'on en peut mener à une conique du faisceau. Les coniques décomposées sont formées par trois couples distincts de points : la figure représentant



les quatre tangentes communes, ces couples sont A et C, B et D, E et F. Les pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel sont alignés. En particulier, le lieu des centres est donc une droite ; en considérant les coniques décomposées du faisceau, on voit qu'elle passe par les milieux des diagonales du quadrilatère complet ABCDEF. Ces milieux sont donc en ligne droite : cette proposition de géométrie élémentaire, assez difficile à établir directement, se trouve ainsi rattachée très simplement à une théorie générale.

259. Cas particuliers. — Si l'une des quatre droites fixes est la

droite de l'infini, toutes les coniques du faisceau sont des paraboles. Considérons alors toutes les paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle. Pour qu'un point soit foyer d'une telle parabole, il faut et il suffit que ses projections sur les trois côtés du triangle soient alignées. Nous laissons à l'élève le soin d'en déduire que *le lieu des foyers des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.* Considérons l'orthocentre du triangle : les tangentes menées de ce point aux coniques du faisceau réduites à des points sont rectangulaires. Donc tous les couples de l'involution des tangentes menées de ce point à l'une de nos paraboles le sont aussi. Donc, *les directrices des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle passent par l'orthocentre de ce triangle.*

Comme exercice, nous proposons à l'élève de déduire de ces énoncés les suivants :

Étant donné un quadrilatère complet :

1° Les cercles circonscrits aux quatre triangles obtenus en supprimant un côté ont un point commun ;

2° Les orthocentres de ces triangles sont en ligne droite.

260. Examinons encore le cas où deux des sommets opposés A et C du quadrilatère des tangentes communes sont les points cycliques. La famille de coniques considérées est alors l'ensemble de celles qui ont les mêmes foyers. En étudiant les propriétés de l'involution engendrée par les deux tangentes menées d'un point à l'une de ces coniques, on obtient aisément les résultats suivants :

Étant données des coniques homofocales, il passe par un point du plan deux de ces courbes, qui sont orthogonales. Les bissectrices des droites joignant ce point aux deux foyers réels et celles des tangentes menées de ce point à une conique quelconque du système coïncident, etc.

261. Pour éviter des longueurs, nous avons laissé de côté les cas limites provenant de la confusion de deux tangentes. Il est cependant intéressant d'observer que les coniques bitangentes en deux points M et N à une conique donnée forment un faisceau tangentiel. Mais nous avons vu qu'elles forment aussi un faisceau ponctuel. La famille formée par ces coniques jouit donc simultanément des propriétés des faisceaux ponctuels et des faisceaux tangentiels. En particulier, le lieu de leurs centres est la droite joignant le milieu de la corde des contacts au pôle de cette corde.

V. — Détermination des quadriques.

262. Faisceaux ponctuels de quadriques. — Les questions concernant la détermination des quadriques se résolvent par des

raisonnements analogues à ceux de la section précédente. Aussi, nous nous bornerons à des indications très générales.

Étant données les deux quadriques

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x, y, z, t) = 0,$$

on dit que les quadriques

$$f(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) = 0$$

forment un faisceau ponctuel. Chacune d'elles coupe $f = 0$ suivant le même système de courbes que la quadrique $g = 0$, chaque courbe intervenant au même ordre de multiplicité:

Les quadriques d'un faisceau ponctuel coupent une droite fixe en deux points qui se correspondent par involution.

On peut tirer de cette proposition, en raisonnant comme pour les coniques, des conséquences importantes; par exemple :

Les plans polaires d'un point par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel passent par une droite fixe.

En coupant un faisceau ponctuel de quadriques par un plan, on obtient un faisceau ponctuel de coniques. Parmi elles, trois sont, en général, décomposées : elles correspondent aux quadriques du faisceau tangentes au plan considéré. D'où le théorème suivant :

Dans un faisceau ponctuel de quadriques, il y en a trois qui sont tangentes à un plan donné; par exemple, il y a trois paraboloïdes.

Toutefois les coniques décomposées du plan considéré peuvent aussi provenir du fait qu'un cône appartenant au faisceau a son sommet dans ce plan. Or les cônes du faisceau sont fournis par les valeurs de λ qui vérifient l'équation du quatrième degré :

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \lambda A_1 & B'' + \lambda B''_1 & B' + \lambda B'_1 & C + \lambda C_1 \\ B'' + \lambda B''_1 & A' + \lambda A'_1 & B + \lambda B_1 & C' + \lambda C'_1 \\ B' + \lambda B'_1 & B + \lambda B_1 & A'' + \lambda A''_1 & C'' + \lambda C''_1 \\ C + \lambda C_1 & C' + \lambda C'_1 & C'' + \lambda C''_1 & D + \lambda D_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons, pour simplifier, que $g = 0$ représente une quadrique non développable, auquel cas l'équation précédente est vraiment du quatrième degré. Il y a quatre cônes passant par l'intersection C des deux quadriques (f) et (g), et leurs sommets sont les points doubles de l'involution de Desargues sur les droites qui les joignent deux à deux : ils sont donc aussi les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les quadriques du faisceau.

Deux des cônes précédents se confondent quand C présente un point double. L'équation $F(\lambda) = 0$ admet alors une racine double.

Les quatre cônes se confondent deux à deux quand C comprend une droite et une cubique. Les deux cônes distincts obtenus ont pour

sommets les points où la droite s'appuie sur la cubique. L'équation $F(\lambda)$ possède deux racines doubles.

Lorsque C se décompose en deux coniques distinctes, il y a deux cônes distincts et indécomposés passant par ces coniques, les deux autres cônes se confondant avec le système des plans des coniques. L'équation $F(\lambda)$ possède une racine double annulant tous les mineurs à trois rangées de son premier membre, et deux racines simples.

Lorsque C comprend une conique et deux droites distinctes, deux des cônes se confondent avec le système des plans de la conique et de l'ensemble des deux droites, les deux autres avec le cône ayant pour sommet le point commun aux deux droites distinctes, pour base la conique. L'équation en λ a deux racines doubles, dont une seule annule tous les mineurs à trois rangées.

Lorsque C est un quadrilatère gauche *abcd*, deux des cônes se confondent avec le système de plans *abc*, *acd*, deux autres avec le système *abd*, *bcd*. L'équation en λ a deux racines doubles annulant tous les mineurs à trois rangées, etc.

Exercice. — *On donne deux coniques* C *et* D. *Pour qu'elles soient sur une même quadrique, il faut et il suffit que la droite commune à leurs plans les rencontre aux mêmes points* A *et* B. *En supposant cette condition remplie, trouver les sommets des cônes passant par ces courbes.*

Ces points sont d'abord sur l'intersection des plans tangents en A et B aux deux coniques. Un plan passant par cette droite coupe alors les cônes suivant deux génératrices. Chacune s'obtient en joignant un point d'intersection de C avec ce plan à un point d'intersection de D, d'où les sommets cherchés.

263. Réseaux ponctuels de quadriques. — On nomme réseau l'ensemble des quadriques représentées par une équation de la forme

$$\alpha f(x, y, z, t) + \beta g(x, y, z, t) + \gamma h(x, y, z, t) = 0.$$

Les surfaces $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ sont supposées ne pas appartenir à un même faisceau ponctuel; elles ont donc en général huit points d'intersection. Mais elles peuvent aussi posséder en commun une ou deux droites, une conique, une droite et une conique, une cubique. Pour exprimer qu'une quadrique passe par une cubique gauche, il suffit d'écrire qu'elle la coupe en plus de six points, ou encore que sept points de la cubique sont sur la quadrique. En écrivant qu'une quadrique passe par une cubique gauche, on l'astreint donc à sept conditions linéaires. Nous allons voir qu'il faut neuf conditions pour déterminer une quadrique. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Toutes les quadriques passant par une cubique gauche forment un réseau.

L'élève montrera analytiquement que *les plans polaires d'un point fixe par rapport aux quadriques d'un réseau ponctuel passent par un point fixe.*

264. Détermination d'une quadrique. — Dans l'équation générale d'une quadrique entrent, d'une manière linéaire et homogène, dix coefficients. Il faut donc les assujettir à neuf relations linéaires et homogènes indépendantes, pour déterminer la quadrique d'une manière unique.

Par exemple, on peut chercher la quadrique qui passe par neuf points. Ce problème est toujours possible, mais peut présenter des cas d'indétermination. Il y a indétermination du premier ordre si les neuf points sont situés sur une biquadratique gauche [1], c'est-à-dire sur l'intersection de deux quadriques indécomposées. Les quadriques passant par les neuf points forment alors un faisceau ponctuel. L'ordre de l'indétermination irait en augmentant, si l'on supposait successivement les neuf points sur une cubique gauche, sur une conique ou sur une droite.

Si l'on impose à une quadrique de passer par huit points, choisis au hasard, on l'assujettit à appartenir à un faisceau linéaire ponctuel. Il peut cependant y avoir exception : on s'en rend compte en remarquant que la donnée de sept points, pris au hasard (non sur une cubique gauche), astreint la quadrique à faire partie d'un certain réseau ponctuel, c'est-à-dire à passer par le huitième point fixe. En résumé, on ne peut pas choisir arbitrairement huit points de manière qu'ils soient communs à trois quadriques. Cela posé, donnons-nous huit points : s'ils ne sont pas communs à trois quadriques, ils déterminent un faisceau. Dans le cas contraire, ils déterminent en général un réseau.

265. Équations générales de quadriques remplissant certaines conditions. — Ayant en vue les applications, nous allons maintenant résoudre quelques problèmes usuels.

---

[1] Les courbes gauches du quatrième ordre se divisent en deux catégories. Prenons sur une telle courbe neuf points : il peut se faire qu'ils déterminent une quadrique unique, qui, ayant plus de huit points communs avec la courbe, la contient entièrement. Par la courbe, il passe alors une seule quadrique : on dit qu'elle est *monoquadratique*; une telle courbe est unicursale, car une des quadriques du faisceau déterminé par huit points fixes dont sept sont sur la courbe, la coupe en un seul point qui dépend de λ. Dans le cas où l'on peut, par la courbe, faire passer plus d'une quadrique, on lui donne le nom de *biquadratique*.

1° *Trouver l'équation générale des quadriques qui passent par deux coniques données.*

Le problème, nous l'avons remarqué, n'est possible que si ces coniques ont deux points communs A et B. Soient alors

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

les équations des plans des deux coniques. Pour exprimer qu'une quadrique contient la conique C du plan $P = 0$, il faut écrire qu'elle contient cinq points de cette conique, dont A et B. Donc elle contiendra la conique D du plan Q si elle contient trois autres points de cette conique. Nous aurons donc à exprimer huit conditions, et, par suite, les quadriques en question forment un faisceau ponctuel. Soit $f = 0$ l'une de ces surfaces. Les autres seront représentées par une équation de la forme

$$f + \lambda PQ = 0.$$

2° *Trouver l'équation générale des quadriques inscrites ou circonscrites à une quadrique donnée.*

Ce problème est un cas limite du précédent. Soit $f = 0$ l'équation de la quadrique donnée. Une quadrique bitangente à celle-ci (n° 215) tend vers une quadrique inscrite lorsque le plan $Q = 0$ de l'une des courbes planes communes tend vers le plan $P = 0$ de la seconde. L'équation cherchée est donc

$$f + \lambda P^2 = 0,$$

$P = 0$ étant l'équation du plan de la courbe de contact.

3° *Trouver l'équation générale des quadriques passant par une conique donnée.*

Le problème comporte une indétermination d'ordre quatre. Définissons la conique comme section plane d'une certaine quadrique, $f = 0$, par le plan $P = 0$. Toutes les quadriques répondant à la question coupent (f) suivant une seconde courbe plane, dont le plan peut être choisi arbitrairement. D'après ce que nous avons vu, l'équation générale cherchée est donc

$$f + P(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t) = 0,$$

α, β, γ, δ désignant des paramètres arbitraires, coefficients du plan de la seconde courbe plane. Si $P = 0$ représente un plan tangent à la quadrique $f = 0$, l'équation précédente est celle des quadriques ayant en commun deux génératrices de systèmes différents.

4° *Trouver l'équation générale des quadriques qui contiennent un quadrilatère gauche abcd.*

Supposons que les plans *abc*, *acd*, *abd*, *bcd* aient respectivement pour équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0;$$

les quadriques passant par les côtés du quadrilatère forment un faisceau ponctuel, qui comprend les systèmes de plans $PQ = 0$ et $RS = 0$. Donc leur équation générale est

$$PQ + \lambda RS = 0.$$

5° *Trouver l'équation générale des quadriques qui admettent en commun deux génératrices de même système.*

Ces quadriques dépendent de trois paramètres. Soient

$$P = Q = 0, \qquad R = S = 0$$

les équations de nos deux génératrices. Un plan passant par la première a une équation de la forme

$$P + \lambda Q = 0.$$

Un plan passant par la seconde est de même

$$R + \mu S = 0.$$

Pour que la droite définie par les deux dernières équations engendre une quadrique contenant les deux droites données, il faut et il suffit que λ et μ soient liés homographiquement. On en déduit que l'équation générale cherchée est

$$PR + \alpha PS + \beta QR + \gamma PQ = 0.$$

266. Faisceaux tangentiels de quadriques. — Soient deux quadriques définies par leurs équations tangentielles

$$f(u, v, w, r) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(u, v, w, r) = 0,$$

ces quadriques pouvant éventuellement se réduire à des coniques, circonstance qui se présenterait pour $f = 0$ si cette équation représentait un cône lorsqu'on y interprète u, v, w, r comme des coordonnées homogènes ponctuelles.

On dit que les quadriques

$$f(u, v, w, r) + \lambda g(u, v, w, r) = 0$$

forment un faisceau tangentiel. Chacune possède en commun avec $f = 0$ les mêmes plans tangents que $g = 0$. Il y a donc communauté de la développable circonscrite à toutes ces quadriques.

La théorie des faisceaux tangentiels de quadriques est corrélative de la théorie des faisceaux ponctuels. Retenons-en seulement quelques points importants :

Les cônes circonscrits, avec un même point M_0 pour sommet, forment un faisceau tangentiel de cônes (c'est-à-dire ont quatre plans tangents communs, ou encore : leurs traces sur un plan quelconque constituent un faisceau tangentiel de coniques); parmi ces cônes, il

en est trois qui se réduisent chacun à un couple de droites issues de M_0, ces cônes correspondent aux quadriques du faisceau passant par M_0, les deux génératrices de l'une sont les deux droites formant l'un des cônes dégénérés. Ces quadriques sont donc au nombre de trois et leurs plans tangents forment un trièdre conjugué par rapport à tout cône circonscrit de sommet M_0.

En outre, dans un faisceau tangentiel, il y a quatre quadriques réduites à des coniques; ces quadriques sont en général distinctes, et alors le tétraèdre formé par leurs plans est conjugué par rapport à toutes les quadriques du faisceau.

267. Application : foyers et focales d'une quadrique. — Un point est, par définition, *foyer* d'une quadrique s'il est le centre d'une sphère de rayon nul bitangente (ou encore, le sommet d'un cône isotrope bitangent) à la quadrique. Cette condition peut être énoncée sous la forme suivante : il faut et il suffit que le cône circonscrit ayant pour sommet le point considéré soit bitangent au cône isotrope de même sommet.

Soit la quadrique définie par l'équation tangentielle

$$(1) \qquad f(u, v, w, r) = 0.$$

En lui adjoignant l'équation

$$(2) \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0,$$

nous aurons le système des plans tangents menés du point M_0 (x_0, y_0, z_0), c'est-à-dire, nous définirons, sous forme tangentielle, le cône circonscrit ayant pour sommet ce point. Le cône isotrope de même sommet est défini en adjoignant de même l'équation (2) à la suivante

$$(3) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Si nous éliminons r entre les équations (1) et (2), nous obtenons la relation

$$(4) \qquad f[u, v, w, -(ux_0 + vy_0 + wz_0)] = 0,$$

à laquelle satisfont les paramètres directeurs u, v, w de la normale au cône circonscrit. Étant donné qu'en tangentielles, il faut deux équations pour définir un cône, on peut dire que (4) est *l'équation directionnelle* du cône circonscrit de sommet M_0 (tout cône étant complètement défini par la donnée de son sommet et de son équation directionnelle) (¹). Nous sommes alors ramenés à ce problème :

(¹) Si dans l'équation directionnelle d'un cône, on considère u, v, w comme des coordonnées ponctuelles, on a justement l'équation ponctuelle du cône supplémentaire.

Écrire que les deux cônes de même sommet, et d'équations directionnelles (3) *et* (4), *sont bitangents.*

Or, il faut et il suffit pour cela qu'en regardant u, v, w comme les coordonnées d'une droite en géométrie plane, les deux coniques définies tangentiellement par (3) et (4) soient bitangentes, c'est-à-dire que l'on ait une identité de la forme

$$(5) \qquad f[u, v, w, -(ux_0 + vy_0 + wz_0)] = \mu(u^2 + v^2 + w^2) + \rho P^2,$$

P désignant une expression de la forme $\alpha u + \beta v + \gamma w$.

D'où un moyen d'obtenir les foyers par un calcul d'identification.

Mais on peut parvenir au résultat plus rapidement. Du raisonnement précédent se dégage en effet la conclusion suivante :

Toutes les quadriques du faisceau tangentiel

$$(6) \qquad f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

ont mêmes foyers que la quadrique initiale $f = 0$.

En effet, il est clair que si f donne lieu à l'identité (5), la fonction

$$f + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

donnera lieu à une identité de même forme, à une modification près de la valeur de μ.

Cette remarque va nous permettre de rattacher la théorie des foyers à la considération des faisceaux tangentiels de quadriques.

Reprenons le faisceau

$$f(u, v, w, r) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Il est déterminé par la quadrique initiale

$$(Q_0) \qquad f = 0$$

et par la quadrique

$$(Q_1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

le fait pour un plan d'être tangent à Q_1 est une condition purement directionnelle ; d'ailleurs le cône circonscrit à Q_1 ayant pour sommet un point quelconque est isotrope : donc Q_1 se réduit au cercle imaginaire de l'infini.

Dans le faisceau considéré, il y a quatre coniques dégénérées. L'une est le cercle imaginaire de l'infini, les trois autres, dites *focales,* sont dans des plans qui déterminent, avec le plan de l'infini, un tétraèdre conjugué commun.

Si $f = 0$ est une quadrique à centre, ces trois plans passent par le centre et forment un trièdre trirectangle (puisque conjugué par rapport au cercle imaginaire de l'infini) et conjugué par rapport à $f = 0$;

donc les trois autres coniques focales sont situées dans les plans de symétrie de $f=0$. En outre, ces plans sont également plans de symétrie de toutes les quadriques du faisceau et, notamment, de ces coniques focales. La donnée d'une focale détermine d'ailleurs le faisceau, et, en particulier, les deux autres focales.

Chaque point M de l'une de ces coniques est un foyer de la conique elle-même : car le cône circonscrit de M à une telle « quadrique » dégénère en une droite double (la tangente en M) et, par cette droite double, on peut mener deux plans tangents au cône isotrope de sommet M (qui est donc bien bitangent à notre conique, donc aussi aux deux autres focales, et à toutes les quadriques du faisceau). Donc les points des focales sont des foyers. Inversement, tout foyer est sur une focale : en effet, les foyers de $f=0$ sont aussi ceux d'une de ses focales ; il suffit donc d'obtenir les foyers d'une conique, c'est-à-dire les centres des sphères de rayon nul qui lui sont bitangentes : ces points sont aussi foyers d'une des deux autres focales ; cela posé, tout foyer est nécessairement dans un plan de symétrie, car si une sphère est bitangente à une conique, elle en coupe le plan suivant un cercle bitangent, donc ayant son centre sur un des axes. Soit dès lors un foyer situé dans un plan de symétrie, et non contenu par la focale située dans ce plan. Ce point est nécessairement un foyer (au sens de la géométrie plane) de cette focale ; or les points où le plan de cette focale est coupé par les deux autres focales sont manifestement des foyers de la première, et, par suite, il est bien démontré que le foyer en question est sur l'une des focales.

En écrivant qu'un cône est bitangent à un cône isotrope de même sommet (x_0, y_0, z_0), nous exprimons que son équation ponctuelle peut s'écrire

$$f(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0,$$

le premier membre étant de la forme

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ +\lambda\left[\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\right]^2=0.$$

Un tel cône est donc de révolution. D'où le résultat suivant :

Chacune des focales est le lieu des sommets des cônes de révolution (réels ou imaginaires) *passant par les deux autres. Elle est aussi le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à l'une quelconque des quadriques du faisceau.*

Si nous nous donnons une ellipse, les quadriques l'admettant pour focale admettront donc, au même titre, pour focales les deux autres coniques formant le lieu des sommets des cônes de révolution passant par cette ellipse : de ces deux coniques, une seule est réelle et peut se déterminer aisément par des considérations élémentaires, en appli-

quant le théorème de Dandelin : c'est une hyperbole ; il y a réciprocité entre cette ellipse et cette hyperbole, chacune d'elles étant le lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'autre, et les foyers de l'une étant sommets de l'autre.

Lorsque la quadrique $f = 0$ est un cône, dans chaque plan de symétrie, chaque focale se décompose en deux droites issues du sommet (¹).

Il nous reste à étudier le cas où la quadrique $f = 0$ est un paraboloïde. Toutes les quadriques du faisceau

$$f + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

sont alors tangentes au plan de l'infini au même point et sont des paraboloïdes de même direction d'axe. Notamment, les coniques focales sont donc des paraboles. Le cas actuel étant un cas limite du cas précédemment étudié, il est clair que toutes nos quadriques auront encore les mêmes plans de symétrie au nombre de deux. Nous n'aurons donc ici que deux paraboles focales ; l'une d'elles étant connue, l'autre située dans un plan rectangulaire passant par l'axe de la première, s'obtiendra par des considérations élémentaires, en cherchant le lieu des sommets des cônes de révolution passant par la première.

Quadriques homofocales. — De ce que nous venons de voir, il résulte que toutes les quadriques ayant les mêmes foyers que la quadrique

$$f(u, v, w, r) = 0$$

sont précisément les quadriques

$$f + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Par chaque point, il passe trois de ces quadriques et leurs plans tangents forment un trièdre conjugué par rapport au cercle de l'infini. Donc, elles se coupent mutuellement à angle droit.

Par exemple, l'ellipsoïde d'équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

a pour équation tangentielle

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0.$$

On en tire aisément l'équation des quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

(¹) Si $f = 0$ est un cylindre, on est ramené à la théorie des foyers dans les coniques. Si $f = 0$ est une surface de révolution, l'une des focales est un cercle, et les deux autres coïncident avec l'axe de ce cercle.

On montrera de même que l'équation réduite d'un système de paraboloïdes homofocaux peut s'écrire

$$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}-2z-\lambda=0.$$

VI. — Invariants.

268. Utilité des invariants. — Supposons que l'on soumette une figure à une transformation point par point, et considérons une fonction de paramètres qui définissent certains éléments de la figure initiale; nous dirons qu'elle est un *invariant* si la même fonction des éléments correspondants de la seconde figure lui est égale. Par exemple, si, en géométrie plane, on transforme par inversion deux cercles de rayons R et R', dont les centres sont distants de d, la quantité

$$\frac{R^2+R'^2-d^2}{2RR'}$$

est un invariant, car, lorsque les cercles sont sécants, cette quantité est fonction de l'angle sous lequel ils se coupent. Lorsqu'on connaît un invariant, on peut, pour le calculer, recourir à la figure la plus commode, déduite de la figure donnée par la transformation considérée. Une fonction de plusieurs invariants est manifestement un autre invariant. Aussi y a-t-il lieu de chercher, étant donnée une transformation d'un type déterminé, définie par des équations contenant certains paramètres arbitraires, un système d'invariants indépendants les uns des autres, au moyen desquels on puisse exprimer tous les autres invariants de la figure; on leur donne le nom d'*invariants fondamentaux*. Bien entendu, nous supposons que tous les invariants considérés sont indépendants des paramètres figurant dans les équations de la transformation.

Dans tout ce qui va suivre, les seules transformations que nous ferons intervenir seront des déplacements, des similitudes, des transformations linéaires ou homographiques. Nous chercherons les invariants d'une figure dans le déplacement le plus général, ou dans la similitude la plus générale, ou dans la transformation linéaire ou homographique la plus générale, c'est-à-dire, pour chacun de ces types de transformation, nous laissons indéterminés tous les paramètres arbitraires mis en jeu. Aux invariants que nous obtiendrons, nous donnerons les noms *invariant de grandeur, invariant métrique, invariant linéaire,* ou *invariant projectif,* suivant qu'ils se rapportent à l'une des quatre transformations précédentes dans l'ordre indiqué.

Précisons la notion de système fondamental d'invariants à l'aide

d'un exemple. Soient n points alignés. Faisons une transformation homographique quelconque. Les $n - 3$ rapports anharmoniques de trois des points avec chacun des autres sont des invariants. Je dis qu'ils forment un système fondamental. En effet, toute fonction

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$$

peut s'écrire

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n),$$

en posant

$$\lambda_i = (x_1 x_2 x_3 x_i), \qquad i = 4, 5, \ldots, n.$$

Après la transformation, la fonction φ devient

$$\varphi(x'_1, x'_2, x'_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n).$$

Or, à x_1, x_2, x_3 on peut faire correspondre des nombres x'_1, x'_2, x'_3 arbitraires. Donc φ n'est un invariant que s'il est indépendant de x_1, x_2, x_3. Il est donc vrai que tout invariant s'exprime au moyen des nombres λ_4, ..., λ_n, qui forment bien un système fondamental.

Supposons que l'on cherche à quelle condition une figure F′ peut être déduite d'une figure F par une des transformations précédentes. L'une d'elles met en jeu un certain nombre d'invariants fondamentaux. Le problème n'est évidemment possible que si ces invariants ont la même valeur pour F et F′.

Ainsi, soient, sur une première droite D, n points M_1, M_2, ..., M_n. Soient n autres points alignés (et cela est évidemment nécessaire) M'_1, M'_2, ..., M'_n. Pour qu'il existe une transformation homographique permettant de passer du premier système au second, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda_4 = \lambda'_4, \qquad \lambda_5 = \lambda'_5, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n = \lambda'_n.$$

La possibilité du problème exige autant de conditions qu'il y a d'invariants fondamentaux.

La recherche systématique des invariants fondamentaux est donc appelée à jouer un grand rôle dans le problème, possible ou non, qui consiste à déduire une figure d'une autre, par une transformation d'une certaine espèce. En outre, elle a l'avantage de rattacher à une même idée directrice un grand nombre de propositions, qui, prises isolément, présenteraient beaucoup moins d'intérêt. Nous nous bornerons à rechercher les invariants d'une conique, d'une quadrique, ou d'un système de deux coniques, par rapport aux transformations précédentes.

269. Invariants d'une conique. — Théorème. — *Une conique possède deux invariants de grandeur et un invariant métrique ; elle est dénuée d'invariant linéaire ou projectif.*

Cela veut encore dire : la superposition d'une conique à une autre

est possible moyennant deux conditions ; la similitude d'une conique à une autre exige une condition. Enfin, deux coniques quelconques peuvent toujours être déduites l'une de l'autre par une transformation linéaire, ou, *a fortiori*, par une transformation homographique.

Ces propositions sont évidentes géométriquement : par exemple, il est clair que pour que deux ellipses soient superposables, il faut et il suffit qu'elles aient mêmes longueurs d'axes. Étant donnée une conique à centre, on pourrait donc prendre pour invariants fondamentaux, quant à un déplacement, les carrés des axes. Analytiquement, on peut opérer de la manière suivante : lorsqu'on transporte les axes au centre, l'équation de la conique, après la translation, est (n° 238)

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Appelons ρ^2 le carré de l'un des axes. Le cercle

$$X^2 + Y^2 = \rho^2$$

doit être bitangent à la conique. Donc en posant

$$-\frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{1}{\rho^2} = S,$$

l'équation

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 - S(X^2 + Y^2) = 0$$

oit représenter une droite double, c'est-à-dire que S doit être racine de l'équation

$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0,$$

ou

$$\delta - (A + C)S + S^2 = 0.$$

Nos deux invariants sont donc

$$\frac{\delta}{\Delta}(A + C) \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta^2}{\Delta^3};$$

autrement dit, pour que deux coniques, représentées en abrégé par

$$f(x, y) = 0, \qquad f_1(x, y) = 0$$

soient superposables, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\Delta}(A + C) = \dfrac{\delta_1}{\Delta_1}(A_1 + C_1), \\ \dfrac{\delta^2}{\Delta^3} = \dfrac{\delta_1^2}{\Delta_1^3}. \end{cases}$$

Si l'on suppose que $f_1(x, y)$ est le polynome déduit de $f(x, y)$ par une

transformation de coordonnées rectangulaires [1], on a entre les coefficients de f et de f_1 les trois relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A + C &= A_1 + C_1, \\ \delta &= \delta_1, \\ \Delta &= \Delta_1. \end{aligned}\right.$$

En effet, outre les deux relations (1), on en obtient une troisième en exprimant l'invariance du terme constant après translation des axes au centre, ce qui donne

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta_1}{\delta_1}.$$

En la combinant avec les relations (1), on obtient bien les relations (2).

Ce résultat est important, et il est clair qu'il est indépendant du fait que δ soit ou non égal à zéro [2]. Supposons qu'on donne au hasard les équations de deux coniques et qu'on reconnaisse que chacune d'elles est une parabole. Pour qu'elles soient égales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi(A + C, \Delta) = \varphi(A_1 + C_1, \Delta_1),$$

φ étant une fonction homogène et de degré zéro des coefficients de l'une des coniques ; on peut prendre

$$\varphi = \frac{(A + C)^3}{\Delta}.$$

Le paramètre d'une parabole est donc une fonction de cette dernière quantité. En calculant φ pour une parabole réduite, on voit que l'on a

$$p^2 = -\frac{\Delta}{(A + C)^3}.$$

270. Cherchons maintenant les conditions de similitude de deux coniques à centre (deux paraboles quelconques sont semblables). Pour l'une d'elles, l'équation aux inverses des carrés des axes est, d'après ce qui précède,

$$\Delta^2 . u^2 + \Delta\delta(A + C)u + \delta^3 = 0.$$

La conservation du rapport $\frac{u''}{u'}$ des racines peut se traduire en écrivant

---

(1) Dans ce qui précède, f_1 était le produit d'un tel polynome par une constante indéterminée.

(2) Pour établir les relations (1), nous avons supposé $\delta \neq 0$. Les relations (2) sont donc établies dans cette hypothèse. Mais alors on peut les vérifier analytiquement, et il est clair que la vérification s'opère de même quand $\delta = 0$.

celle de

$$\frac{u'}{u''} + \frac{u''}{u'} = \frac{(u' + u'')^2 - 2u'u''}{u'u''}, \qquad \text{ou de} \qquad \frac{(u' + u'')^2}{u'u''}.$$

On obtient donc l'invariant suivant :

$$\frac{(A + C)^2}{\delta}$$

ou encore le suivant, obtenu en en retranchant 4,

$$\frac{(A - C)^2 + 4B^2}{\delta}.$$

On obtient donc, en général, une seule condition de similitude de deux coniques. Toutefois, dans le domaine réel, si l'une des coniques est un cercle, l'invariant précédent est nul pour cette conique. En exprimant qu'il est nul aussi pour la seconde conique, on obtient deux conditions. Hormis ce cas, il y a une seule condition de similitude.

271. Deux ellipses, deux hyperboles ou deux paraboles peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire à coefficients réels. Il n'y a donc pas d'invariant linéaire, et *a fortiori* d'invariant projectif pour une conique. Toutefois, appliquons une proposition établie plus haut (nº 243, Remarque), et qui s'énonce ainsi :

Après une substitution linéaire et homogène, le nouveau discriminant d'une forme quadratique est égal au produit de l'ancien par le carré du déterminant de la substitution.

Nous voyons que les quantités δ et Δ deviennent, après une transformation linéaire,

$$\delta_1 = \delta \cdot d^2, \qquad \Delta_1 = \Delta \cdot d^2,$$

d étant le déterminant des coefficients de x et y. Il ne faudrait pas en conclure que $\frac{\Delta}{d}$ soit un invariant, car cette quantité n'est pas une fonction homogène de degré zéro des coefficients de la première conique. Aux quantités δ et Δ qui, après la transformation, se reproduisent multipliées par une fonction des seuls coefficients de cette dernière, on donne le nom d'***invariants relatifs***. Il est clair qu'en annulant un invariant relatif linéaire, on obtient une équation de condition dont la signification est conservée par toute transformation linéaire. Effectivement, la condition $\delta = 0$ exprime que la conique est une parabole ; la condition $\Delta = 0$ signifie qu'elle se décompose.

Au point de vue projectif, Δ est de même un invariant relatif.

272. Invariants projectifs d'un système de deux coniques. — Soient les deux coniques

$$f(x, y, t) = 0, \qquad f_1(x, y, t) = 0.$$

Une transformation homographique substitue aux premiers membres de leurs équations de nouvelles formes quadratiques $F(X, Y, T)$ et $F_1(X, Y, T)$. Il est clair que les deux courbes

$$f(x, y, t) + \lambda f_1(x, y, t) = 0,$$
$$F(X, Y, T) + \lambda F_1(X, Y, T) = 0$$

se décomposent pour les mêmes valeurs de λ. Donc les racines de l'équation en λ (nº 255) :

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta_1 + \lambda^3\Delta_1 = 0,$$

sont inaltérées par une transformation homographique; par suite, il en est de même des quantités

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}, \qquad \frac{\Theta}{\Delta_1}, \qquad \frac{\Theta_1}{\Delta_1},$$

qui sont des fonctions symétriques de ces racines.

Si nous cherchons à transformer homographiquement un système de deux coniques en un autre système de deux coniques, le problème comportera deux conditions de possibilité. En effet, une transformation homographique plane dépend de huit paramètres([1]), et, par suite, est déterminée quand on donne quatre couples de points correspondants. Soient donc deux systèmes formés chacun de deux coniques : les coniques du premier système se coupant (nous le supposons pour simplifier) en des points distincts P, Q, R, S et celles du second en des points distincts P_1, Q_1, R_1, S_1, considérons la transformation homographique qui fait correspondre P_1 à P, Q_1 à Q, R_1 à R, S_1 à S. Aux coniques C et D du premier système, elle fait correspondre deux coniques bien déterminées, et la coïncidence de ces dernières avec chaque conique du second système exige une condition. Nous trouvons donc bien deux conditions de possibilité et par suite il y a deux invariants fondamentaux projectifs d'un système de deux coniques. On les obtient en combinant les trois quantités ci-dessus, de manière à former des fonctions homogènes de degré zéro, des coefficients de chaque conique.

([1]) Pour le voir, il suffit d'écrire les équations de la transformation en coordonnées non homogènes

$$X = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + 1}, \qquad Y = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + 1},$$

forme qui suppose que la droite qui se transforme en la droite de l'infini ne passe pas par l'origine des axes adoptés.

On peut prendre

$$\frac{\Delta\Delta_1}{\Theta\Theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\Theta_1^3}{\Delta_1\Theta^3}.$$

Au même titre que Δ et Δ_1, Θ et Θ_1, se reproduisent après la transformation, multipliées par le carré du déterminant de la substitution. Ces quantités sont donc des invariants relatifs. Nous allons examiner la signification géométrique des conditions obtenues en annulant Θ et Θ_1.

273. Signification géométrique de la condition $\Theta = 0$. — Nous avons vu que l'on a

$$\Theta = A_1\alpha + A_1'\alpha' + A_1''\alpha'' + 2B_1\beta + 2B_1'\beta' + 2B_1''\beta''.$$

Il est manifeste que Θ s'annule lorsque l'on a simultanément

$$A_1 = A_1' = A_1'' = \beta = \beta' = \beta'' = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la conique (f_1) est circonscrite au triangle formé par les droites $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$, celui-ci étant conjugué par rapport à la conique (f). Ainsi, *pour qu'il existe un triangle inscrit dans (f_1) et conjugué par rapport à (f)*, il est nécessaire que l'on ait

$$\Theta = 0.$$

Nous allons montrer que cette condition est aussi suffisante. Supposons-la remplie. Considérons le triangle qui a pour sommets un point quelconque A de (f_1), et les points où la polaire de A par rapport à (f) rencontre (f_1). On peut toujours se ramener, par une transformation homographique, au cas où les côtés de ce triangle auraient respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad t = 0,$$

les coordonnées de A étant (0, 0, 1). Dans ces conditions, nous avons

$$f(x, y, t) = Ax^2 + A'y^2 + A''t^2 + 2B''xy,$$
$$f_1(x, y, t) = 2B_1yt + 2B_1'tx + 2B_1''xy,$$

d'où nous déduisons

$$\Theta = 2B_1\beta + 2B_1'\beta' + 2B_1''\beta'';$$

or, nous avons

$$\beta = B'B'' - AB = 0, \qquad \beta' = B''B - A'B' = 0,$$
$$\beta'' = BB' - A''B'' = -A''B''.$$

L'hypothèse exige que l'on ait

$$A''B''B_1'' = 0$$

ou, si les coniques considérées sont indécomposées,

$$B'' = 0.$$

Le résultat annoncé est ainsi établi, et on voit qu'il existe une infinité de tels triangles répondant à la question.

On peut encore dire, et nous laissons au lecteur le soin de l'établir, que

$$\Theta = 0$$

est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des triangles circonscrits à (f) et conjugués par rapport à (f_1).

Étant données deux coniques (f) et (f_1) remplissant la condition $\Theta = 0$, on dit que (f_1) est *harmoniquement circonscrite à* (f). On voit, d'après cela, que la condition linéaire la plus générale imposée à une conique (f_1) exprime qu'elle est harmoniquement circonscrite à une conique donnée.

La condition $\Theta_1 = 0$ s'interprète en échangeant le rôle de (f) et de (f_1) : elle signifie que (f) est harmoniquement circonscrite à (f_1).

274. Invariants d'une seule quadrique. — La théorie se développe parallèlement à celle de la question analogue concernant les coniques. On obtient trois invariants de grandeur, deux invariants métriques, pas d'invariant linéaire ou projectif.

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une quadrique ; appelons $F_1(x_1, y_1, z_1)$ ce que devient le polynome $F(x, y, z)$ après une transformation de coordonnées (en axes rectangulaires). Une translation n'altère pas l'ensemble des termes du second degré. Or quand la transformation considérée conserve l'origine, on a

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x, y, z).$$

Donc les deux formes φ et φ_1 conduisent à la même équation en S, et l'on a

$$A_1 + A'_1 + A''_1 = A + A' + A'',$$

$$A'_1A''_1 - B_1^2 + A''_1A_1 - B_1'^2 + A_1A'_1 - B_1''^2$$
$$= A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2,$$
$$\Delta_1 = \Delta.$$

En outre, lorsqu'on amène, par une translation d'axes, l'origine à coïncider avec le centre, le terme constant possède, indépendamment de l'orientation du trièdre de coordonnées, la valeur

$$\frac{H}{\Delta}.$$

On a donc

$$\frac{H_1}{\Delta_1} = \frac{H}{\Delta}$$

et par suite

$$H_1 = H.$$

Nous obtiendrons donc les trois invariants de grandeur, en formant des fonctions des quatre quantités précédentes, qui soient homogènes et de degré zéro par rapport aux coefficients. On peut prendre

$$\frac{(A + A' + A'')^4}{H}, \qquad \frac{(\alpha + \alpha' + \alpha'')^2}{H}, \qquad \frac{\Delta^4}{H^3}.$$

Remarque. — L'équation en S est un cas particulier de l'équation en λ, celui où l'on considère les deux formes fondamentales

$$f = \varphi(x, y, z), \qquad f_1 = x^2 + y^2 + z^2.$$

La condition

$$A + A' + A'' = 0$$

exprime donc qu'il existe une infinité de trièdres de sommet O, inscrits dans le cône $\varphi = 0$ et conjugués par rapport au cône isotrope, ou encore que le cône directeur de la quadrique est capable d'un trièdre trirectangle inscrit. De même,

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le cône directeur soit capable d'un trièdre trirectangle circonscrit.

275. Théorèmes d'Apollonius. — Aux considérations précédentes, on peut rattacher les théorèmes d'Apollonius relatifs aux propriétés des diamètres conjugués d'une quadrique à centre. Prenons par exemple l'ellipsoïde, qui, rapporté à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Faisons un changement d'axes, le nouveau système $Ox_1y_1z_1$ étant constitué par trois diamètres conjugués. Les formules de transformation sont de la forme

$$x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1,$$
$$y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1,$$
$$z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \gamma''$ désignant les cosinus directeurs des trois axes obliques par rapport au système $Oxyz$. En appelant a_1, b_1, c_1 les longueurs des trois demi-diamètres conjugués, nous avons l'identité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2}.$$

En outre, le carré de la distance d'un point à l'origine, qui, dans

le premier système, a pour valeur $x^2+y^2+z^2$, vaudra dans le second

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x_1^2+\cdots+2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')y_1z_1+\cdots,$$

ou encore

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2y_1z_1\cos\lambda+2z_1x_1\cos\mu+2x_1y_1\cos\nu,$$

en posant

$$\lambda=\widehat{y_1Oz_1},\qquad \mu=\widehat{z_1Ox_1},\qquad \nu=\widehat{x_1Oy_1}.$$

Exprimons que les deux formes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\mathrm{S}(x^2+y^2+z^2)$$

et

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}+\frac{z_1^2}{c_1^2}\\ -\mathrm{S}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+2y_1z_1\cos\lambda+2z_1x_1\cos\mu+2x_1y_1\cos\nu$$

se décomposent en un produit de deux facteurs du premier degré pour les mêmes valeurs de S. Ces valeurs sont, pour la première,

$$\frac{1}{a^2},\qquad \frac{1}{b^2},\qquad \frac{1}{c^2}.$$

Pour la seconde, elles sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2}-\mathrm{S} & -\mathrm{S}\cos\nu & -\mathrm{S}\cos\mu \\ -\mathrm{S}\cos\nu & \frac{1}{b_1^2}-\mathrm{S} & -\mathrm{S}\cos\lambda \\ -\mathrm{S}\cos\mu & -\mathrm{S}\cos\lambda & \frac{1}{c_1^2}-\mathrm{S} \end{vmatrix}=0,$$

qu'on peut écrire

$$\mathrm{S}^3.\Omega-\mathrm{S}^2\left(\frac{\sin^2\lambda}{a_1^2}+\frac{\sin^2\mu}{b_1^2}+\frac{\sin^2\nu}{c_1^2}\right)\\ +\mathrm{S}\left(\frac{1}{b_1^2c_1^2}+\frac{1}{c_1^2a_1^2}+\frac{1}{a_1^2b_1^2}\right)-\frac{1}{a_1^2b_1^2c_1^2}=0,$$

en posant

$$\Omega=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

On doit donc avoir

$$(1)\quad \begin{cases} a_1^2b_1^2c_1^2.\Omega=a^2b^2c^2, \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2=a^2+b^2+c^2, \\ b_1^2c_1^2\sin^2\lambda+c_1^2a_1^2\sin^2\mu+a_1^2b_1^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2. \end{cases}$$

Remarquons que $b_1c_1 \sin\lambda$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres OB_1 et OC_1 et que l'on peut écrire Ω sous la forme

$$\Omega = \begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' & \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' \\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 \end{vmatrix},$$

qui montre que Ω est le carré du déterminant des α, β, γ,... γ''.

La première des relations (1) exprime donc (n° 231) que le volume du parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués est constant. La seconde exprime la constance de la somme des carrés des longueurs de ces demi-diamètres, et la troisième la constance de la somme des carrés des aires des parallélogrammes construits sur deux d'entre eux. Ce sont là les trois théorèmes d'Apollonius.

VII. — Compléments sur l'homographie.

276. Un théorème sur les courbes unicursales. — *Les représentations propres d'une courbe unicursale se déduisent de l'une d'elles en opérant sur le paramètre t une transformation homographique* (conséquence du n° 111). Écartons les représentations impropres : alors, si l'on fixe les valeurs t_1, t_2, t_3 de t en trois points de la courbe, t sera déterminé en tout autre point.

277. Points doubles d'une transformation homographique. — Effectuer une transformation homographique, c'est faire correspondre au point M de coordonnées homogènes (X, Y, Z, T) le point M_1 de coordonnées homogènes (X_1, Y_1, Z_1, T_1), (n° 110), défini par les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= AX + A'Y + A''Z + A'''T, \\ Y_1 &= BX + B'Y + B''Z + B'''T, \\ Z_1 &= CX + C'Y + C''Z + C'''T, \\ T_1 &= DX + D'Y + D''Z + D'''T. \end{aligned}$$

Pour qu'un point coïncide avec son transformé, il faut et il suffit que leurs coordonnées homogènes soient proportionnelles. On est ainsi amené à chercher des solutions du système

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda X &= AX + A'Y + A''Z + A'''T, \\ \lambda Y &= BX + B'Y + B''Z + B'''T, \\ \lambda Z &= CX + C'Y + C''Z + C'''T, \\ \lambda T &= DX + D'Y + D''Z + D'''T, \end{aligned} \right.$$

dont les équations sont homogènes en X, Y, Z, T. En écrivant qu'elles admettent des solutions non toutes nulles, nous obtenons la condition

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & A' & A'' & A''' \\ B & B'-\lambda & B'' & B''' \\ C & C' & C''-\lambda & C''' \\ D & D' & D'' & D'''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

qui est du quatrième degré en λ. En égalant dans le système (1) l'inconnue λ à une racine de l'équation (2), les équations de ce système se réduisent en général à trois distinctes, qui déterminent des quantités proportionnelles à X, Y, Z, T. Il y a donc, en général, pour une transformation homographique de l'espace quatre points doubles. On verrait de même qu'une transformation homographique du plan admet en général trois points doubles.

Toutefois, pour des transformations particulières, ces conclusions peuvent se trouver en défaut. Sans entrer dans une discussion complète, nous allons le montrer sur des exemples.

277bis. Coïncidence d'un couple de points doubles. — En géométrie de la droite, les deux points doubles de deux divisions homographiques (de même base) peuvent se confondre. Si les abscisses x et x' des points décrivant les deux divisions sont liées par la relation

$$axx' + bx + cx' + d = 0,$$

la condition de coïncidence des points doubles sera

$$(b+c)^2 - 4ad = 0.$$

La même circonstance sera donc possible dans le plan et dans l'espace. Pour la réaliser dans le plan, partons d'une correspondance entre deux points M et M' sur une droite D, laquelle admettra sur cette droite deux points doubles confondus en un point A. Soit B un point extérieur à la droite D. A un point N de la droite AB, faisons correspondre homographiquement un second point N' de cette même droite, de manière que les points doubles soient A et B. Il existe alors une transformation homographique et une seule du plan, se réduisant sur les droites AD et AB (qu'elle conserve) aux correspondances précédentes entre M et M', N et N'; on peut voir qu'elle admet deux points doubles confondus en A : elle est en effet cas limite d'une homographie se réduisant toujours sur la droite AB à la même correspondance (N, N') que tout à l'heure et sur la droite AD à une correspondance (M, M'') dont les points doubles seraient A et un point infiniment voisin de A.

Il est clair que ces remarques s'étendent à l'espace. Signalons que les *déplacements,* qui sont des transformations homographiques particulières, ont justement deux points doubles confondus au point à

l'infini γ de l'axe hélicoïdal du déplacement : en effet cet axe est bien une droite invariante, sur laquelle la transformation se réduit à une correspondance par translation. Or, l'homographie

$$x' = x + a$$

admet deux points doubles confondus à l'infini. Les deux autres points doubles du déplacement sont les points de contact α et β des tangentes menées de γ au cercle de l'infini (1).

278. Homologie. — Considérons maintenant une homothétie : c'est encore une transformation homographique particulière. Elle admet pour points doubles :

1° le centre d'homothétie ;

2° tout point de la droite de l'infini si nous raisonnons dans le plan, tout point du plan de l'infini si nous raisonnons dans l'espace. Plaçons-nous dans cette hypothèse.

Il est clair que l'homothétie a une infinité d'équivalents projectifs dans lesquels un plan donné d'une manière quelconque remplacera le plan de l'infini. On est ainsi amené à la notion des *transformations par homologie,* ayant un point double isolé O et une infinité de points doubles recouvrant la totalité d'un plan P. Le point O est, par définition, le centre d'homologie et le plan P est le plan d'homologie. Les propriétés essentielles de la transformation sont les suivantes :

1° deux points homologues sont alignés avec le centre d'homologie ;

2° deux droites homologues se coupent dans le plan d'homologie.

Appelons A un point quelconque, distinct de O et extérieur au plan P. Donnons-nous un homologue A′ sur la droite OA : l'homologie est alors complètement déterminée : à un point M correspond en effet le point M′ de la droite OM tel que les droites AM et A′M′ concourent sur l'intersection des plans P et OAM.

279. Relations avec la théorie des transformations linéaires. — Les équations

$$X_1 = AX + A'Y + A''Z,$$
$$Y_1 = BX + B'Y + B''Z,$$
$$Z_1 = CX + C'Y + C''Z$$

définissent indifféremment :

1° Une transformation homographique en géométrie plane, X, Y, Z

(1) Voir pour cette question nos *Leçons de Géométrie vectorielle,* n° 267. Le cercle de l'infini est globalement invariant par les déplacements et par les similitudes.

étant regardées comme les coordonnées homogènes d'un point du plan ;

2° Une transformation linéaire conservant l'origine, en regardant X, Y, Z comme les coordonnées d'un point de l'espace.

Lorsqu'on se place à ce nouveau point de vue, le système

$$\begin{aligned} \lambda X &= AX + A'Y + A''Z, \\ \lambda Y &= BX + B'Y + B''Z, \\ \lambda Z &= CX + C'Y + C''Z, \end{aligned}$$

définit les droites issues de l'origine et qui demeurent invariantes, ou, comme on dit, les *directions principales* de la transformation linéaire.

De ce rapprochement entre problèmes conduisant aux mêmes équations, il découle qu'à tout résultat relatif aux transformations homographiques du plan en correspond un autre concernant les transformations linéaires spatiales conservant l'origine. Notamment, nous voyons qu'une telle transformation linéaire possède en général trois directions principales.

On peut rattacher à ces considérations la recherche des directions principales des quadriques. Bornons-nous ici à considérer les surfaces

$$\varphi(x, y, z) = C,$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant un polynome homogène et du second degré,

$$2\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Toutes ces surfaces sont homothétiques et concentriques. Supposons les axes de coordonnées rectangulaires. Je dis que la transformation linéaire définie par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax + B''y + B'z = \varphi'_x, \\ y_1 &= B''x + A'y + Bz = \varphi'_y, \\ z_1 &= B'x + By + A''z = \varphi'_z, \end{aligned}$$

(transformation qui conserve l'origine) est attachée à la répartition spatiale de valeurs numériques φ (on dit aussi : *au champ scalaire* φ) d'une manière indépendante des axes. En effet, le vecteur $\mathbf{OM}_1$ de composantes x_1, y_1, z_1 est parallèle à la normale à la surface $\varphi = \text{const.}$ qui passe au point M ; sa direction a donc bien le caractère d'invariance annoncé ; il en est de même de sa grandeur, car le point M_1 est justement tel que le produit scalaire $\mathbf{OM}_1 \,.\, \mathbf{OM}$, c'est-à-dire

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z$$

soit égal (en vertu de l'identité d'Euler) à la valeur de 2φ au point M (cf. n° 67bis).

La transformation linéaire précédente a donc bien un caractère indépendant des axes. Or, il suffit de se reporter à la recherche des di-

rections principales des quadriques pour constater que les directions principales des surfaces

$$\varphi = C$$

sont identiques à celles de cette transformation linéaire.

En même temps, on voit apparaître une classe importante de transformations linéaires : *celles qui sont représentées, en coordonnées rectangulaires, par des formules dont les coordonnées forment un tableau* SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT A SA DIAGONALE PRINCIPALE. La recherche de leurs directions principales se ramène à celle des directions principales d'une quadrique

$$2\varphi(x, y, z) = C,$$

le polynome φ ayant précisément pour dérivées partielles les trois formes linéaires donnant x_1, y_1, z_1. Supposons obtenu un trièdre trirectangle de directions principales : en le prenant pour trièdre de coordonnées, les équations d'une transformation linéaire du type précédent se réduisent à la forme

$$\bar{x}_1 = a\bar{x}, \qquad \bar{y}_1 = a'\bar{y}, \qquad \bar{z}_1 = a''\bar{z}.$$

Une telle transformation (qu'on peut appeler *transformation autométrique*) peut donc s'obtenir en composant trois dilatations de coordonnées dans un système d'axes rectangulaires.

Pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à nos *Leçons de Géométrie vectorielle* (n°s 81 et suivants).

VIII. — Sur les courbes et les surfaces des ordres 3 et 4.

280. Cubiques planes au point de vue projectif. — Un polynome général du troisième degré homogène en x, y, t contient dix coefficients. Donc les cubiques planes dépendent de neuf paramètres. Neuf points *choisis au hasard* déterminent une cubique : il y a exception pour neuf points qui sont communs à deux cubiques (irréductibles ou décomposées)

$$f = 0, \qquad g = 0;$$

il existe alors une infinité de cubiques (formant un faisceau linéaire ponctuel)

$$\lambda f + \mu g = 0$$

passant par ces neuf points; dans cette configuration spéciale, la donnée de huit points (qui détermine les coefficients à un paramètre près) fait connaître le neuvième.

Faisons quelques remarques au sujet des neuf points communs à deux cubiques

$$f = 0, \qquad g = 0.$$

Supposons que six de ces points $A_1, \ldots, A_6$ soient sur une conique. L'ensemble de cette conique et de la droite joignant deux des trois points fixes restants, par exemple A_7 et A_8, est une cubique appartenant au faisceau linéaire ponctuel défini par les points $A_1, \ldots, A_6$, A_7, A_8. Puisque A_9 est le neuvième point fixe du faisceau déterminé par $A_1, \ldots, A_8$, la cubique précédente y passe donc. Par suite A_8 est sur la droite A_7A_8 (s'il était sur la conique $A_1 \ldots A_6$, toutes les cubiques considérées se décomposeraient...). D'où ce théorème :

Etant donné un faisceau ponctuel linéaire de cubiques, lorsque six de ses neuf points fixes sont sur une conique (susceptible de décomposition), *les trois autres sont en ligne droite.*

Voici une application : coupons une cubique par deux sécantes qui la rencontrent respectivement en M_1, M_2, M_3 et N_1, N_2, N_3. Menons M_1N_1 et soit L_1 le troisième point d'intersection de cette droite et de la cubique ; soit de même L_2 le point analogue pour M_2N_2 et soit L_3 le point analogue pour M_3N_3. Les points M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 sont sur une conique. Donc L_1, L_2, L_3 sont en ligne droite.

Un cas particulier important est le suivant : appelons *tangentiel* d'un point M d'une cubique le point P où cette courbe est coupée à nouveau par la tangente en M. On a la propriété que voici :

Si trois points M_1, M_2, M_3 *de la cubique sont alignés, il en est de même de leurs tangentiels* P_1, P_2, P_3. *Plus particulièrement encore, la droite joignant deux points d'inflexion a pour troisième point d'intersection avec la cubique un nouveau point d'inflexion.*

281. Classification des cubiques. — La classification projective des cubiques se fait immédiatement en se basant sur l'absence ou la présence de point double. Nous aurons donc trois classes :

1° *cubiques générales,* ou sans point double, dépendant de neuf paramètres ; leur classe est six ;

2° *cubiques à point double,* les tangentes en ce point étant distinctes (famille à huit paramètres) ; leur classe est quatre ;

3° *cubiques à point de rebroussement* (famille à sept paramètres) ; leur classe est trois.

Les transformations homographiques du plan dépendent de huit paramètres : il en résulte qu'il est impossible de transformer homographiquement deux cubiques générales prises au hasard l'une dans l'autre ; la transformation ne deviendra possible que si une condition convenable, traduite par une relation d'égalité, est remplie. Ou, si l'on préfère, *une cubique générale admet un invariant projectif.* Nous en indiquerons plus loin la signification (n° 283).

Indiquons que deux cubiques de quatrième classe peuvent toujours, et cela d'une manière unique, être transformées homographiquement

l'une dans l'autre. Enfin, pour une cubique de troisième classe, il existe une infinité à un paramètre de transformations homographiques qui la conservent : soit, par exemple, la courbe

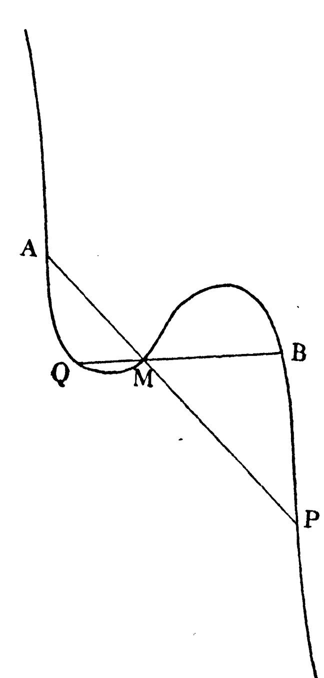
$$y^2 = x^3.$$

Les transformations

$$x = \lambda^2 x_1, \qquad y = \lambda^3 y_1$$

la laissent inaltérée.

282. Génération des cubiques. — Prenons sur une courbe deux points fixes quelconques A et B. Soit M un point courant de la cubique. Les droites AM et BM sont liées par une correspondance algébrique. Si la droite AM est donnée, elle coupe la courbe en un troisième point P, on a donc deux positions possibles BM et BP de sa correspondante. Pareillement, à tout rayon BM du second faisceau, il correspond dans le faisceau de sommet A un couple de rayons AM, AQ. C'est ce que nous exprimerons en abrégé en disant que la correspondance entre AM et BM est une correspondance (2, 2), la notation (i, k) s'appliquant à toute correspondance algébrique telle qu'à une valeur du premier élément variable en correspondent k du second, et qu'à une valeur du second élément en correspondent i du premier.



D'ailleurs la correspondance (2, 2) que nous avons ici n'est pas du type le plus général possible : elle est particularisée par le caractère suivant : si l'on considère le rayon AB du premier faisceau, l'un de ses deux homologues dans le second est BA, et réciproquement (¹).

Ceci nous amène tout naturellement à généraliser la méthode de raisonnement appliquée au nº 118 à la génération des coniques. Cher-

---

(¹) En prenant un point M sur une conique et deux points A et B non sur la courbe, on aurait entre AM et BM une correspondance (2, 2) plus particulière encore : à la demi-droite AB correspondraient dans le second faisceau deux demi-droites confondues avec BA ; à la demi-droite BA correspondraient dans le 1ᵉʳ faisceau deux demi-droites confondues avec AB.

chons d'abord le lieu du point de rencontre de deux rayons homologues d'une correspondance (i, k), issus de deux points fixes $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$. L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \lambda, \qquad \frac{y - y_2}{x - x_2} = \mu, \qquad f(\lambda, \mu) = 0,$$

où f est un polynome de degré i en λ et de degré k en μ. L'élimination est immédiate et fournit un lieu de degré $i + k$ [ce qu'on retrouverait en cherchant les points d'intersection du lieu avec une droite, remarquant qu'ils sont sur cette droite les points doubles d'une correspondance (i, k), points dont le nombre est $i + k$].

Revenons au problème précédent : nous aurons $i = k = 2$. Nous aurons donc en général une courbe du quatrième ordre, et le calcul ci-dessus montrera qu'elle admet les points A et B comme points doubles.

Mais le cas qui nous intéresse est celui où nos deux faisceaux ont un rayon homologue en commun, AB ou BA. Dans ce cas, la droite AB appartient à la courbe cherchée, qui se décompose en cette droite et en une cubique.

En résumé, *on peut regarder une cubique comme le lieu des points d'intersection de deux rayons homologues d'une correspondance* (2, 2) *dans deux faisceaux de sommets* A *et* B, *lorsque ces faisceaux admettent la droite* AB *comme rayon homologue commun.*

Remarque. — Si M est le point de contact d'une tangente à la cubique menée de A, le point P se confond avec M, alors le rayon AM du premier faisceau a, dans le second faisceau, ses deux homologues confondus. Si la cubique admet un point double, lorsque M coïncide avec ce point double, le rayon AM du premier faisceau a dans le second faisceau ses deux homologues confondus suivant BM, en même temps que le rayon BM du second faisceau a dans le premier faisceau ses deux homologues confondus suivant AM. Cette propriété est caractéristique de la présence d'un point double.

283. L'invariant projectif des cubiques générales (méthode de M. J. Richard) (1). — En s'appuyant sur le mode de génération précédent des cubiques, on est conduit au théorème de Salmon :

Soit A *un point quelconque d'une cubique de sixième classe. Considérons les quatre tangentes* AT_1, AT_2, AT_3, AT_4 *menées de* A *et dont les points de contact* T_1, T_2, T_3, T_4 *sont distincts de* A. *Le rapport anhar-*

(1) *Rev. de Math. spéciales*, 14e année, octobre 1903.

monique du faisceau de ces droites est indépendant de la position de A *sur la courbe.*

Pour le démontrer, appelons B un second point de la cubique, BS_1, BS_2, BS_3, BS_4 les tangentes menées de B et dont les points de contact S_1, S_2, S_3, S_4 sont distincts de B. En reprenant les notations du nº précédent, la relation biquadratique entre les coefficients angulaires λ et μ des droites AM et BM joignant A et B à un point courant M de la cubique s'écrira

$$f(\lambda, \mu) = 0.$$

L'équation donnant les coefficients angulaires λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de AT_1, AT_2, AT_3,, AT_4 s'obtiendra en ordonnant f par rapport à μ et écrivant qu'elle a en μ une racine double ; soit

$$\varphi(\lambda) = 0$$

l'équation discriminante ainsi obtenue ; pareillement, en ordonnant f par rapport à λ et écrivant que cette équation admet une racine double, nous aurons une équation discriminante

$$\psi(\mu) = 0$$

ayant pour racines les coefficients angulaires μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 de BS_1, BS_2, BS_3, BS_4. Je dis que l'on aura toujours

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ (}^1\text{)}.$$

Pour le montrer, on peut noter, avec M. J. Richard, la possibilité d'engendrer une correspondance (2, 2) en prenant dans un même plan deux coniques et associant à chaque point de la première le point de contact de l'une des tangentes qu'on en peut mener à la seconde [2].

---

[1] En réalité, nous établissons ainsi le théorème suivant : soit une correspondance (2, 2) quelconque entre les droites AM et BM, correspondance en vertu de laquelle M décrit une quartique ayant A et B pour points doubles, ou, exceptionnellement, une cubique ayant A et B pour points simples. Les deux faisceaux formés, soit des quatre tangentes menées de A à la courbe, soit des quatre tangentes menées de B, ont même rapport anharmonique. Ce théorème englobe celui du texte.

[2] Nous proposons de retrouver ce résultat à titre d'exercice. Partant d'une conique C particulière $x = \lambda$, $y = \lambda^2$, on considérera des valeurs particulières de λ et de μ satisfaisant aux conditions

$$0 = f(\lambda_0, \mu_0) = f(\lambda_1, \mu_0) = f(\lambda_1, \mu_1) = f(\lambda_2, \mu_1) = \ldots\ldots = f(\lambda_5, \mu_4);$$

on prendra la conique C′ tangente aux cinq cordes $\lambda_0\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$,.., $\lambda_4\lambda_5$ de C ; en convenant d'affecter des valeurs μ_0, μ_1, μ_2 les points où C′ est touchée par $\lambda_0\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_2\lambda_3$, la représentation paramétrique de C′ est déterminée, et la mise en correspondance de C et C′ suivant le mode précédent donne une correspondance (2, 2). On prouvera alors qu'elle a suffisamment d'éléments communs avec la correspondance initiale pour se confondre avec elle.

Cela posé, la relation ci-dessus exprime l'égalité entre le rapport anharmonique des quatre points communs aux deux coniques, considérés comme appartenant à la première et le rapport anharmonique des quatre tangentes communes, considérées comme appartenant à la seconde. Or cette égalité résulte immédiatement de la possibilité de transformer la première conique en la seconde par polaires réciproques.

284. Mais on peut aussi raisonner directement. Pour cela, on remarque d'abord que si deux variables sont en correspondance (2, 2), il en est encore de même d'une transformée homographique de chacune d'elles. On peut donc faire en sorte que, par un choix convenable des coefficients de la relation $f(\lambda, \mu) = 0$, on ait

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \mu_2 = \infty, \qquad \lambda_3 = \mu_4 = 1.$$

Tout d'abord, on trouve facilement la forme de $f = 0$, telle que sur ces trois couples de relations, les deux premiers soient vérifiés

$$(1) \quad a^2\lambda^2\mu^2 + 2ab\lambda^2\mu + 2ac\lambda\mu^2 + b^2\lambda^2 + c^2\mu^2 + 2b\lambda + 2c\mu + 1 + 2d\lambda\mu = 0.$$

Faisons $\mu = 1$. Nous avons le trinome en λ,

$$\lambda^2(a+b)^2 + 2(ac+b+d)\lambda + (c+1)^2,$$

qui doit admettre une racine double, d'où la condition

$$(2) \qquad ac + b + d = \pm(a+b)(c+1).$$

Pareillement, pour $\lambda = 1$, le trinome $f(1, \mu)$ doit avoir une racine double, d'où la condition

$$(3) \qquad ab + c + d = \pm(a+c)(b+1).$$

En prenant dans ces deux relations le signe +, elles se réduisent à une seule

$$d = bc + a,$$

ce qui donne une relation $f = 0$ de la forme

$$a^2\lambda^2\mu^2 + 2ab\lambda^2\mu + 2ac\lambda\mu^2 + 2(bc+a)\lambda\mu + b^2\lambda^2 + c^2\mu^2 + 2b\lambda + 2c\mu + 1 = 0,$$

ou

$$(a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + 1)^2 = 0.$$

L'hypothèse $d = bc + a$ est donc à rejeter et il faut prendre le signe (—) devant les seconds membres de (2) et de (3). On trouve ainsi

$$a = 1, \qquad -d = bc + 2(b+c) + 1,$$

relations en vertu desquelles les deux équations discriminantes calculées

à partir de (1)

$$\varphi(\lambda) = (bc + a - d)\lambda[2ab\lambda^2 + (a + bc + d)\lambda + 2c] = 0,$$
$$\psi(\mu) = (bc + a - d)\mu[2ac\mu^2 + (a + bc + d)\mu + 2b] = 0$$

peuvent s'écrire

$$\varphi(\lambda) = 4(b + 1)(c + 1)\lambda(b\lambda - c)(\lambda - 1),$$
$$\psi(\mu) = 4(b + 1)(c + 1)\mu(c\mu - b)(\mu - 1).$$

Finalement, si nous posons

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \infty, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = \frac{c}{b},$$
$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \infty, \quad \mu_3 = \frac{b}{c}, \quad \mu_4 = 1,$$

nous aurons bien[1]

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = \frac{b}{c}. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Lorsqu'on transforme homographiquement une cubique générale, on obtient une autre cubique générale pour laquelle le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un point de cette courbe a même valeur que le rapport anharmonique analogue pour la première. Ce rapport anharmonique est donc un invariant projectif de la courbe.

285. Propriétés diverses des cubiques planes. — On obtient une cubique lorsqu'on cherche :

1° le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe O aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel ;

2° le lieu des points dont les polaires par rapport à trois coniques fixes sont concourantes, la cubique obtenue étant aussi le lieu du point de concours[2].

Je me borne à signaler ces propriétés, en renvoyant pour la démonstration et l'étude des divers cas possibles au chapitre VII des *Compléments de géométrie moderne* de M. Ch. Michel[3]. Je signale également à titre d'exercice (*ibid.*, chap. VIII) un théorème de Chasles (théorème A).

Si M et N sont les points d'intersection variables d'une CUBIQUE A POINT DOUBLE O, avec une droite passant par un point fixe A de la cubique, les couples de droites telles que OM et ON appartiennent à une involution contenant le couple des tangentes au point double.

---

(1) Nous posons ici $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} : \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_2}$.

(2) Dans le cas de trois cercles, elle se décompose en la droite de l'infini et le cercle orthogonal aux trois cercles donnés.

(3) Voir aussi *Les Lieux géométriques en Mathématiques spéciales*, par M. T. Lemoyne.

On établira de plus la réciproque. On cherchera quelle particularité se présente dans le cas où le point O est un point de rebroussement, etc., etc.

On pourra également montrer que si M décrit une cubique à point double O, en appelant A un point fixe quelconque de cette courbe, les droites OM et AM sont liées par une correspondance (2, 1). Grâce à quoi, le théorème A apparaîtra comme un cas particulier de cette proposition facile : dans une correspondance (2, 1), les deux valeurs de la première variable associées à une valeur indéterminée de la seconde se correspondent par involution (autre forme du théorème sur les racines d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent linéairement d'un paramètre).

Soit M un point d'une cubique à point double, P son tangentiel. A chaque point M correspond un seul point P. Au point P correspondront deux positions du point M dans une cubique de quatrième classe, et une seule dans une cubique de troisième. On en déduit le théorème suivant :

Dans une cubique possédant un point double à tangentes distinctes, un point et son tangentiel sont liés par une correspondance (2, 1), *s'exerçant entre les droites* OM *et* OP. Une correspondance (2, 1) ayant trois éléments doubles, il s'ensuit qu'une cubique de l'espèce considérée présente *trois points d'inflexion*. D'après ce qui précède, nous savons qu'ils sont en ligne droite.

Dans le cas d'une CUBIQUE A POINT DE REBROUSSEMENT, *la correspondance de* OM *et* OP *sera homographique*. En outre, elle admettra comme rayon double la tangente de rebroussement. Il s'ensuit qu'une cubique à point de rebroussement n'admet qu'un seul point d'inflexion : une telle courbe est d'ailleurs à la fois du troisième ordre et de la troisième classe, et il y a symétrie entre le rôle du point d'inflexion, au point de vue tangentiel, et celui du point de rebroussement, au point de vue ponctuel. Notons encore la propriété suivante : soit I le point d'inflexion d'une cubique de troisième classe, O son point de rebroussement. Menons par I une sécante IPQ. Les rayons doubles de l'involution liant OP, OQ sont OI et la tangente de rebroussement. Il s'ensuit que le lieu des conjugués harmoniques du point I par rapport aux points P et Q est la tangente de rebroussement. Le lecteur trouvera lui-même l'énoncé corrélatif.

286. Quartiques planes au point de vue projectif. — Nous nous bornerons à faire remarquer :

1° La possibilité d'engendrer une quartique à point triple par une correspondance (3, 1);

2° Celle d'engendrer une quartique ayant au moins deux points

doubles distincts (et peut-être un troisième, distinct ou non des précédents) par une correspondance (2, 2);

3° Celle d'engendrer une quartique ayant un seul point double par une correspondance (2, 3) dans laquelle la droite joignant les sommets des deux faisceaux est sa propre homologue ;

4° Celle d'engendrer une quartique générale par une correspondance (3, 3) dans laquelle la droite joignant les sommets A et B des deux faisceaux est sa propre homologue, avec la particularité suivante : lorsqu'on cherche l'homologue de la demi-droite AB, on trouve un système de trois rayons dont deux se confondent avec BA, et lorsqu'on cherche l'homologue de la demi-droite BA, on trouve un système de trois rayons dont deux se confondent avec AB. Dans ces conditions, la droite AB fait deux fois partie du lieu, et il reste une quartique admettant A et B pour points simples.

Il y a lieu de noter la parenté (déjà rencontrée) entre les cubiques d'une part et les quartiques possédant deux points doubles distincts d'autre part. Leur propriété commune consiste dans le fait de dériver également des correspondances biquadratiques (de même que la droite et les coniques dérivent des correspondances homographiques).

287. Propriétés anallagmatiques des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires. — Supposons que les points cycliques i et j soient points simples d'une cubique : on dit alors que la cubique est *circulaire* ; si les points i et j sont points doubles d'une quartique, on dit que cette quartique est *bicirculaire*. Dans l'un et l'autre cas, en appelant M un point courant de la courbe, il existe entre les droites iM et jM une correspondance (2, 2), qu'on pourra définir analytiquement en donnant par exemple la relation entre les ordonnées à l'origine des droites iM et jM. En posant à cette intention

$$y - ix = \xi, \qquad y + ix = \eta,$$

une relation biquadratique générale

$$(1) \quad A\xi^2\eta^2 + 2\xi\eta(B\xi + B'\eta) + C\xi^2 + C'\eta^2 + 2D\xi\eta + 2E\xi + 2E'\eta + F = 0,$$

(où les lettres accentuées désignent les imaginaires conjuguées des quantités désignées par les mêmes lettres non accentuées) représentera :

1° Une quartique bicirculaire (susceptible de se décomposer en deux cercles) si A est $\neq 0$.

2° Une cubique circulaire si $A = 0$.

Avec les notations précédentes, une inversion ayant pour pôle le point $x = y = 0$ (ou $\xi = \eta = 0$) (point qui, n'ayant joué aucun rôle,

pourra être pris *ad libitum*) est définie par les formules

$$\xi_1 = \frac{K}{\xi}, \qquad \eta_1 = \frac{K}{\eta}.$$

Elle équivaut donc à effectuer une transformation homographique sur chaque coordonnée ξ, η. Mais alors, d'après ce que nous avons déjà remarqué, nous aurons une nouvelle relation biquadratique entre ξ_1 et η_1. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

En appliquant une inversion quelconque à une courbe de la famille comprenant à la fois les quartiques bicirculaires et les cubiques circulaires, on obtient encore une courbe de cette famille.

Je laisse au lecteur le soin d'établir la propriété suivante : la transformée sera une cubique circulaire dans le seul cas où l'on prend le pôle d'inversion sur la courbe initiale.

288. Dans les problèmes de géométrie plane où apparaissent des inversions, il y a souvent intérêt à accroître d'une unité le nombre des dimensions et à prendre le pôle d'inversion hors du plan. Le plan de l'énoncé primitif devient alors une sphère et l'on est conduit à un problème sur la sphère. Une application de cette idée s'est présentée au n° 125 à propos des faisceaux de cercles. Deux faisceaux conjugués de cercles dans le plan deviennent, lors d'une inversion de pôle extérieur au plan, deux faisceaux de cercles d'une sphère, dont l'un est formé des sections par les plans contenant une droite D, l'autre des sections par les plans contenant la conjuguée de D. Profitons-en pour noter la proposition suivante : les faces d'un tétraèdre conjugué par rapport à une sphère y admettent pour sections planes quatre circonférences deux à deux orthogonales. Remarquons encore l'anallagmatie[1] de ce système de quatre cercles par rapport à chacun des sommets du tétraèdre, pris pour pôle d'anallagmatie, la puissance étant celle de ce sommet par rapport à la sphère. Le lecteur établira ce résultat, en même temps qu'il énoncera et démontrera la réciproque.

Rappelons enfin ce théorème (n° 126) : en appliquant une inversion J à deux figures *inverses l'une de l'autre* (ou si l'on préfère : symétriques par rapport à une sphère σ, si l'on raisonne dans l'espace, symétriques par rapport à une circonférence γ, le mot *symétrique* pouvant être appliqué, moyennant un sens convenable, à la géométrie du plan ou à celle de la sphère), on obtient encore deux figures *inverses l'une de l'autre* (c'est-à-dire symétriques par rapport à une sphère ou à un cercle, qu'on obtient en transformant σ ou γ par J). Notamment,

---

(1) Anallagmatie signifie : conservation par inversion. L'anallagmatie généralise la symétrie par rapport à un plan, la sphère fondamentale de l'inversion se substituant au plan de symétrie.

l'inverse d'une figure anallagmatique sera une nouvelle anallagmatique.

Considérons un tétraèdre conjugué par rapport à une sphère ayant un sommet confondu avec le centre O, les trois autres sommets se trouvant à l'infini dans des directions rectangulaires. En prenant pour origine le point O, et pour plans de coordonnées les faces à distance finie, le système des huit points

$$(x, y, z), \quad (-x, -y, z), \quad (x, -y, -z), \quad (-x, y, -z),$$
$$(-x, -y, -z), \quad (x, y, -z), \quad (-x, y, z), \quad (x, -y, z)$$

formera une figure anallagmatique sur la sphère par rapport à chacun des quatre cercles fondamentaux déterminés par les plans de coordonnées et le plan de l'infini.

En appliquant le théorème (nº 126) qui vient d'être rappelé, on obtient la notion générale suivante : *système de huit points d'une sphère anallagmatique par rapport à quatre cercles fondamentaux, deux à deux orthogonaux d'une sphère, sections de cette sphère par les quatre faces d'un tétraèdre conjugué.*

289. Ces préliminaires étant posés, nous allons montrer leur utilité dans l'étude des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires. Considérons une biquadratique sphérique, c'est-à-dire la courbe d'intersection d'une sphère et d'une quadrique Q. Laguerre a remarqué qu'en prenant le pôle d'inversion O sur la sphère, la courbe plane transformée est :

1° du quatrième ordre si le pôle est en dehors de la biquadratique;

2° du troisième si le pôle est sur la biquadratique ;

il a observé de plus que cette courbe plane passe par les traces (sur son plan P) des deux génératrices isotropes de la sphère issues du pôle d'inversion O. Ces deux points, qui sont justement les points cycliques du plan P, jouent le rôle de points doubles de la quartique ou de points simples de la cubique (car chaque génératrice de la sphère d'un système déterminé s'appuie sur une des deux précédentes : elle détermine avec le point O un plan dont la trace passe par i, par exemple, or la génératrice mobile de la sphère coupe la quadrique Q en deux points; donc dans le plan P une droite passant par i coupe l'inverse de la biquadratique en deux points distincts de i).

Laguerre a remarqué enfin que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que toute cubique circulaire ou quartique bicirculaire est l'inverse d'une biquadratique sphérique : il suffit en effet de noter que les biquadratiques tracées sur une sphère dépendent de huit paramètres (car huit points pris sur cette sphère déterminent bien un faisceau linéaire ponctuel de quadriques). Or, il en est de même, dans le plan, des quartiques bicirculaires.

On est donc ramené, en ce qui concerne les propriétés anallagmatiques, à l'étude des biquadratiques sphériques. Considérons une telle courbe. Nous savons (n° 262) qu'il y a dans le faisceau de quadriques déterminé par elles quatre cônes, dont les sommets sont ceux d'un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Il est manifeste que la courbe sera anallagmatique par rapport à chacune des quatre circonférences sections de la sphère par les faces de ce tétraèdre.

Envisageons l'un des cônes précédents. Les plans tangents coupent la sphère suivant des cercles bitangents à la biquadratique et orthogonaux au cercle fondamental situé dans la face, opposée au sommet du cône considéré, du tétraèdre conjugué.

Une biquadratique sphérique, ou une courbe plane circulaire du troisième ordre ou bicirculaire du quatrième, peut donc, de quatre manières, s'obtenir comme l'enveloppe d'une famille de cercles qui lui sont bitangents. Ces cercles demeurent orthogonaux à un cercle fixe. Elle est ainsi anallagmatique par rapport à quatre cercles, deux à deux orthogonaux.

Partons d'une biquadratique sphérique et considérons dans le plan P l'un des systèmes de cercles bitangents à la courbe inverse. Le centre ω de l'un de ces cercles γ est la trace de la droite joignant le point O au pôle ϖ (par rapport à la sphère) du cercle c, bitangent à la biquadratique, et inverse de γ : en effet, tout plan passant par ϖ détermine dans la sphère une section orthogonale à c, et tout plan passant par $O\varpi$ détermine une section ayant pour inverse une droite de P orthogonale à γ, c'est-à-dire un diamètre de γ.

Cela posé, le lieu du point ϖ est la conique polaire réciproque du *cône enveloppe des plans des cercles* c, par rapport à la sphère. Nous aurons ainsi quatre coniques, qui sont les quadriques dégénérées d'un faisceau tangentiel comprenant la sphère. Leurs perspectives faites de O sur le plan P sont quatre nouvelles coniques, lieux des centres ω des cercles bitangents γ (de chaque système). Nous allons établir que *ces quatre coniques sont homofocales.*

En effet, de même qu'il y a dans chaque plan quatre points communs à toutes les quadriques d'un faisceau ponctuel, on peut corrélativement mener par chaque point quatre plans tangents aux quadriques d'un faisceau tangentiel. Considérons notamment le point O, pris précédemment pour pôle d'inversion : la sphère initiale fait partie du faisceau, donc tout plan tangent à cette surface mené par O contient l'une des génératrices du point O. Donc nos quatre coniques sont tangentes à quatre plans qui se coupent deux à deux suivant les droites Oi et Oj. Il en est de même des cônes de sommet O ayant ces coniques pour directrices. D'où il résulte bien que les coniques du plan P, traces de ces cônes, sont homofocales. On verra facilement

qu'on obtient des paraboles dans le seul cas où la transformée de la biquadratique est une cubique.

En résumé, appelons dans le plan courbe *cyclique* l'enveloppe d'un cercle K, orthogonal à un cercle fixe C et dont le centre décrit une conique Γ. Cette courbe sera circulaire du troisième ordre, ou bicirculaire du quatrième. De plus, on pourra l'engendrer de trois autres manières par le processus indiqué, les quatre cercles C, C′, C″, C‴ étant deux à deux orthogonaux et les quatre coniques correspondantes Γ, Γ′, Γ″, Γ‴ étant homofocales.

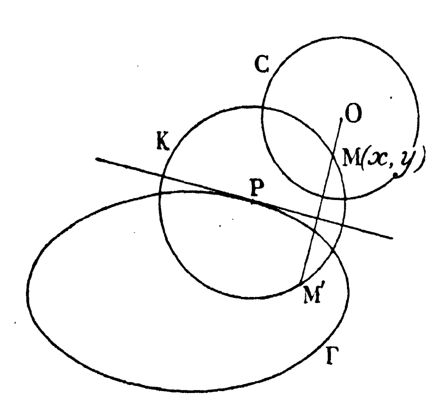
290. Indiquons sommairement comment ces questions se présentent, lorsqu'on les aborde par le calcul. Soit (¹)

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\gamma = 0$$

l'équation du cercle C et soit

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0$$

l'équation de la conique Γ, sous forme tangentielle. On obtient les points de contact M et M′ du cercle K avec son enveloppe en abaissant du centre O (α, β) de C la perpendiculaire sur la tangente à Γ au centre P de K.



Cela posé, la condition pour qu'un point M(x, y) soit sur la cyclique s'obtiendra en évaluant les coordonnées de M′ (point d'intersection de OM et de la polaire de M par rapport à C) et en écrivant que la perpendiculaire au milieu de MM′ est une tangente à Γ. Or on trouve pour équation de cette perpendiculaire

$$2X(x - \alpha) + 2Y(y - \beta) - (x^2 + y^2 - 2\gamma) = 0,$$

d'où l'équation du lieu du point M,

$$\begin{aligned} 4A(x-\alpha)^2 + 4A'(y-\beta)^2 + A''(x^2+y^2-2\gamma)^2 \\ - 4B(y-\beta)(x^2+y^2-2\gamma) \\ - 4B'(x-\alpha)(x^2+y^2-2\gamma) + 8B''(x-\alpha)(y-\beta) = 0; \end{aligned}$$

(¹) J'emprunte la méthode ci-dessous à MM. Aubert et Papelier, *Exercices de géométrie analytique*, tome II, p. 158, 159, 160. Voir aussi les *Leçons d'agrégation* de M. G. Koenigs.

ce lieu est bien une quartique bicirculaire si $A'' \neq 0$, et une cubique circulaire si A'' est nul, c'est-à-dire si la conique Γ est une parabole.

Inversement, si nous partons de la cyclique, dont l'équation est donnée *a priori*, en identifiant cette équation avec celle qui vient d'être obtenue, nous trouverons α, β, γ, A, A', A'', B, B', B''. Si la courb est du quatrième ordre, on peut choisir les axes de manière à mettre son équation sous la forme

$$(x^2+y^2)^2+4Cx^2+4C'y^2+8Dx+8D'y+4E=0.$$

Dans ces conditions, on trouve immédiatement $B=B'=B''=0$, puis

$$A''=\frac{A-A''\gamma}{C}=\frac{A'-A''\gamma}{C'}=\frac{-A\alpha}{D}=\frac{-A'\beta}{D'}=\frac{A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2}{E};$$

en prenant $A''=-1$, il vient

$$A=-(\gamma+C),\qquad A'=-(\gamma+C'),\qquad \alpha=-\frac{D}{\gamma+C},\qquad \beta=\frac{-D'}{\gamma+C'},$$

$$\frac{D^2}{\gamma+C}+\frac{D'^2}{\gamma+C'}+\gamma^2-E=0.$$

La dernière équation, qui est du 4e degré, détermine γ. Les coniques Γ ont alors des équations tangentielles de la forme

$$(\gamma+C)u^2+(\gamma+C')v^2=w^2;$$

on reconnaît que les quatre coniques provenant des quatre valeurs précédentes de γ sont homofocales, puisque γ prenant des valeurs arbitraires, cette équation représente justement toutes les coniques homofocales à $Cu^2+C'v^2=w^2$.

Dans le cas d'une courbe du troisième ordre, on dirigera les calculs de la même façon, après avoir ramené, par changement d'axes, son équation à la forme

$$(x^2+y^2)(x+a)+2Cx+2C'y+D=0.$$

291. Cycliques présentant un point double à distance finie. — Ces courbes sont des inverses de biquadratiques sphériques présentant un point double : le faisceau ponctuel de quadriques correspondant à une telle biquadratique ne contient dès lors que deux cônes. Il n'y a donc plus ici que deux familles de cercles bitangents.

On obtient une cyclique à point double en prenant l'inverse d'une conique, ce pôle étant dans le plan de la conique. Dans le seul cas où le pôle est sur la conique, la courbe inverse est une cubique. Dans tous les cas, le pôle est point double de la cyclique et les tangentes en ce point sont parallèles aux directions asymptotiques de la conique transformée. Citons quelques exemples :

L'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une courbe qu'on peut représenter en coordonnées polaires par l'équation $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$ (*lemniscate de Bernoulli*). En prenant le pôle d'inversion sur l'hyperbole équilatère elle-même, on obtient des cubiques avec un point double à tangentes rectangulaires (type *strophoïde*) : notamment, si le pôle est au sommet, on obtient une courbe possédant un axe de symétrie (*strophoïde droite*). Toute inverse de parabole est une cyclique à point de rebroussement : lorsque le pôle est sur la parabole, on obtient les cubiques circulaires à point de rebroussement (type *cissoïde*) ; lorsque le pôle est au sommet, on retrouve la *cissoïde de Dioclès*.

Enfin, si l'on prend pour pôle l'un des foyers d'une conique, on peut la représenter par l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}.$$

Son inverse sera donc de la forme

$$\rho = a + b \cos \omega \qquad (\textit{limaçon de Pascal}).$$

Notamment, l'inverse d'une parabole par rapport à son foyer est une *cardioïde*.

Pour compléter ces aperçus, notons encore que *la podaire d'un point O par rapport à une conique est également une cyclique à point double*. Ce problème se ramène d'ailleurs au précédent. En effet, désignons par P la projection de O sur la tangente en M à une conique C et considérons sur la droite OP le point Q tel que

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = \mathrm{R}^2,$$

Q est le pôle de la tangente MP à C par rapport à la circonférence de centre O et de rayon R. Donc Q décrit la conique Γ polaire réciproque de C par rapport à ce cercle; par suite, P décrit la figure inverse de Γ, le pôle d'inversion étant le point O et la puissance R^2.

Je laisse au lecteur le soin d'établir la condition pour que la podaire de C soit une cubique (il faut que C soit une parabole) ; de démontrer que les tangentes en O à la podaire sont les perpendiculaires aux tangentes menées de O à la conique C : en particulier, pour que la podaire présente en O un rebroussement, il faut que O soit sur C.

292. Quelques propriétés des courbes algébriques planes. — Soit

$$f(x, y, t) = 0$$

l'équation homogène d'une courbe d'ordre n. Prenons dans le plan de cette courbe deux points $\mathrm{M}'(x', y', t')$ et $\mathrm{M}''(x'', y'', t'')$. Pour que le point $\mathrm{M}(x' + \lambda x'', y' + \lambda y'', t' + \lambda t'')$ de la droite $\mathrm{M}'\mathrm{M}''$ soit sur la

courbe, il faut et il suffit que λ soit racine de l'équation

$$f(x' + \lambda x'', y' + \lambda y'', t' + \lambda t'') = 0,$$

laquelle peut encore s'écrire, en l'ordonnant suivant les puissances de λ,

$$(1)\qquad \lambda^m f(x'', y'', t'') + \lambda^{m-1}\left(x' \frac{\partial f}{\partial x''} + y' \frac{\partial f}{\partial y''} + t' \frac{\partial f}{\partial t''}\right) + \cdots$$

La relation

$$(2)\qquad x' \frac{\partial f}{\partial x''} + y' \frac{\partial f}{\partial y''} + t' \frac{\partial f}{\partial t''} = 0,$$

en vertu de laquelle la somme des racines de l'équation (1) est nulle, *exprime une propriété projective de la courbe et du système des deux points* M' *et* M'', et il en est d'ailleurs de même de chaque relation obtenue en annulant le coefficient d'un terme quelconque de l'équation (1).

Pour le prouver, imaginons qu'on effectue une transformation homographique

$$x = a\xi + b\eta + c\theta,$$

$$y = a_1\xi + b_1\eta + c_1\theta,$$

$$t = a_2\xi + b_2\eta + c_2\theta.$$

Il viendra

$$f(x, y, t) \equiv \varphi(\xi, \eta, \theta).$$

Soit (ξ', η', θ') le transformé de (x', y', t'), $(\xi'', \eta'', \theta'')$ celui de (x'', y'', t''); alors $(\xi' + \lambda\xi'', \eta' + \lambda\eta'', \theta' + \lambda\theta'')$ sera le transformé de

$$(x' + \lambda x'', y' + \lambda y'', t' + \lambda t'').$$

Nous aurons donc

$$f(x' + \lambda x'', y' + \lambda y'', t' + \lambda t'') \equiv \varphi(\xi' + \lambda\xi'', \eta' + \lambda\eta'', \theta' + \lambda\theta'')$$

et par suite les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres sont égaux.

Il s'ensuit bien qu'en transformant par exemple la relation (2), on aura la relation de même forme (on dit aussi : *covariante*)

$$(2)'\qquad \xi' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi''} + \eta' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta''} + \zeta' \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta''} = 0,$$

et le théorème est établi.

Il est maintenant facile d'interpréter la relation (2). Supposons $t' = t'' = 1$. Nous aurons, en appelant M_i l'un des points d'intersection de la droite M'M'' et de la courbe $f = 0$, λ_i la valeur correspondante de λ,

$$\mathbf{M}_i\mathbf{M}' + \lambda_i\, \mathbf{M}_i\mathbf{M}'' = 0.$$

La relation (2) exprime donc que l'on a

$$\text{(3)} \qquad \frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M''M_1}} + \cdots + \frac{\overline{M'M_n}}{\overline{M''M_n}} = 0$$

ou, compte tenu des relations $\overline{M'M_i} = \overline{M'M''} + \overline{M''M_i}$,

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{\overline{M''M_1}} + \frac{1}{\overline{M''M_2}} + \cdots + \frac{1}{\overline{M''M_n}} = \frac{n}{\overline{M''M'}}.$$

On a ainsi, sous les deux formes équivalentes (3) et (4) une extension projective de la notion de division harmonique. Toutefois les points de base M′ et M″ cessent ici (pour $n > 2$) de jouer un rôle symétrique.

Si le point M′ reste fixe, le point M″ décrit, en vertu de (2), une courbe de degré $n - 1$. Au contraire, si M″ reste fixe, M′ décrira une ligne droite [1].

Supposons en particulier que M″ soit rejeté à l'infini dans une direction donnée Δ. En appelant encore $M_1, \ldots, M_n$ les points de rencontre d'une parallèle à Δ avec la courbe, le point M′ défini par (3) deviendra le centre des moyennes distances des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Ce point décrit donc une droite : c'est *le diamètre de Newton* de la direction Δ. En prenant une courbe ayant n asymptotes à distance finie, on montrera aisément que ce diamètre est le même pour la courbe et pour le système de ses asymptotes (Mac-Laurin)

293. Cubiques gauches. — Nous avons déjà noté (n° 96) que toute courbe gauche du troisième ordre est unicursale. Nous avons vu en outre qu'on obtient une cubique gauche lorsqu'on cherche l'intersection de deux quadriques ayant une génératrice commune (n° 214). D'ailleurs, toute cubique gauche peut être obtenue de cette manière : en effet, prenons sept points sur une telle courbe. Si nous formons l'équation aux t des points de rencontre d'une quadrique et de la cubique, elle sera du sixième degré. Puisqu'elle a déjà sept racines, elle est identiquement satisfaite. Donc la cubique est contenue tout entière sur la quadrique. D'autre part, il faut neuf points pour déterminer une quadrique. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Il passe par une cubique gauche une infinité de quadriques, dépendant de deux paramètres.

Ces quadriques déterminent donc un *réseau linéaire ponctuel* [2]. Si

---

(1) On pourra se proposer une étude plus détaillée dans le cas des cubiques.

(2) Il importe de noter que nous rencontrons ici un cas singulier de réseau, puisqu'en général, les quadriques d'un réseau n'ont en commun que des points isolés.

la cubique est réelle, elles seront toutes réglées. Prenons deux d'entre elles Q et Q'. Elles se coupent suivant la cubique et une de ses cordes (n° 214) qui est une génératrice G commune à ces quadriques. Sur Q par exemple, les génératrices du même système que G rencontrent Q' en deux points non situés sur G, donc placés sur la cubique ; les génératrices du système différent de G rencontrent Q' en deux points dont l'un est sur G, l'autre se trouvant sur la cubique.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Etant donnée une cubique gauche tracée sur une quadrique, les génératrices d'un système sont des cordes de cette cubique, tandis que celles de l'autre système la coupent en un seul point.

Parmi les quadriques contenant une cubique gauche, il convient de signaler les cônes ayant leur sommet sur la courbe, cette courbe jouant également le rôle de directrice. On déduit de cette remarque la suivante :

Six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *déterminent une cubique gauche.*

En effet, cette cubique sera l'intersection (moins la droite A_1A_6) du cône de sommet A_1 et de génératrices A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6 et du cône de sommet A_6 et de génératrices A_6A_1, A_6A_2, A_6A_3, A_6A_4, A_6A_5 (ces deux cônes étant du second ordre).

Il s'ensuit que *les cubiques gauches dépendent de douze paramètres*, car en appelant n le nombre de paramètres inconnus dont elles dépendent, la figure formée par une cubique gauche sur laquelle on a marqué six points dépend de $n+6$ paramètres : or, on voit directement qu'elle dépend de 3×6 paramètres. Donc

$$n+6=18 \qquad \text{ou} \qquad n=12.$$

En appelant x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point, toute cubique gauche pourra se représenter par des formules du type suivant :

$$\begin{aligned} x &= a_3u^3+a_2u^2+a_1u+a, \\ y &= b_3u^3+b_2u^2+b_1u+b, \\ z &= c_3u^3+c_2u^2+c_1u+c, \\ t &= d_3u^3+d_2u^2+d_1u+d, \end{aligned}$$

c'est-à-dire pourra être obtenue en transformant homographiquement la cubique particulière

$$x_1=u^3, \qquad y_1=u^2, \qquad z_1=u, \qquad t_1=1,$$

ou, en revenant aux coordonnées non homogènes, la cubique

$$x=z^3, \qquad y=z^2.$$

294. Soient AB et A'B' deux cordes fixes d'une cubique gauche, M un point courant de la courbe. On voit immédiatement que la *corres-*

pondance entre les deux plans ABM et A'B'M *est homographique*. D'où une nouvelle génération des cubiques gauches, comme lieu du sommet d'un trièdre dont les faces passent par trois droites fixes et se correspondent deux à deux homographiquement. On tire également du théorème précédent la notion de rapport anharmonique de quatre points, M_1, M_2, M_3, M_4, d'une cubique gauche : quelle que soit la corde A'B', on aura toujours

$$(A'B'M_1,\ A'B'M_2,\ A'B'M_3,\ A'B'M_4) = (ABM_1,\ ABM_2,\ ABM_3,\ ABM_4),$$

ce qui montre que le rapport anharmonique des plans contenant quatre points de la courbe et une même corde est indépendant de cette corde. On pourra donc définir des correspondances homographiques et involutives entre deux points de la cubique. Lorsqu'une cubique est tracée sur une quadrique, les génératrices jouant le rôle de cordes déterminent sur la courbe une correspondance involutive. Réciproquement, soient sur une cubique gauche deux points M et M' en correspondance involutive. Prenons deux couples M_1, M'_1 et M_2, M'_2 de cette involution. Il existe une quadrique et une seule contenant la cubique et les cordes $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$. Ses génératrices, cordes de la cubique, y déterminent une involution possédant deux couples communs avec l'involution initiale, donc confondue avec elle. D'où ce théorème :

La droite qui joint deux points liés involutivement sur une cubique gauche engendre une quadrique.

295. Signalons encore, sous forme d'exercice, la notion de *droites conjuguées* par rapport à une cubique gauche. Nous proposons donc le problème suivant :

1° On donne une cubique gauche, et on considère les points M_1, M_2, M_3 où elle est coupée par un plan parallèle à un plan fixe. Montrer que le lieu du point de concours des médianes du triangle $M_1M_2M_3$ décrit une droite (projeter cylindriquement parallèlement à deux directions du plan fixe, en s'appuyant sur le théorème du diamètre de Newton).

2° Transformer projectivement le résultat précédent. Dire tout d'abord ce que devient le centre de gravité d'un triangle par une transformation homographique faisant correspondre à la droite de l'infini une certaine transversale. Montrer que si une transversale tourne autour d'un point fixe A, son *pôle* relatif au triangle décrit la droite ayant A pour pôle. Après ces préliminaires, établir le théorème suivant : soient M_1, M_2, M_3 les points où une cubique gauche est coupée par un plan variable qui tourne autour d'une droite fixe D ; le lieu du pôle de la transversale D par rapport au triangle $M_1M_2M_3$ est une droite

Δ ; établir la réciprocité entre D et Δ. (On donne à ces droites le nom de droites conjuguées par rapport à la cubique.)

296. Dans certains problèmes, il y aura intérêt à envisager systématiquement l'ensemble des cordes d'une cubique gauche. Ces droites forment une famille à deux paramètres. Chaque plan contient trois de ces droites, formant un triangle dont les sommets sont les points d'intersection du plan et de la cubique. Par chaque point hors de la cubique, il passe une de ces droites et une seule, car donner un point en même temps que la cubique revient à donner un faisceau linéaire ponctuel de quadriques : la seule corde passant par le point est alors la génératrice commune à toutes les quadriques d'un tel faisceau.

297. Relations avec la théorie du complexe linéaire. — Soient n vecteurs glissants A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n. On appelle *moment résultant* du système de ces vecteurs relativement à un point O un vecteur OG d'origine O et dont la grandeur géométrique est donnée par

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA}_1 \wedge \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{OA}_n \wedge \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n.$$

En un autre point O′, on aurait un nouveau moment résultant

$$\begin{aligned}\mathbf{O'G'} &= \mathbf{O'A}_1 \wedge \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{O'A}_n \wedge \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n \\ &= (\mathbf{O'O} + \mathbf{OA}_1) \wedge \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \cdots + (\mathbf{O'O} + \mathbf{OA}_n) \wedge \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n \\ &= \mathbf{OG} + \mathbf{O'O} \wedge (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n).\end{aligned}$$

On voit par là qu'on connaîtra le moment résultant en tout point O′ de l'espace si l'on connaît :

1° ce moment résultant en un point O ;

2° la somme géométrique $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n$ du système.

On aura

$$\mathbf{O'G'} = \mathbf{OG} + \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{R}.$$

Supposons notamment que le point O′ décrive une droite Δ. La différence géométrique des moments résultants en deux points M_1 et M_2 de cette droite sera le produit vectoriel de $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ par la somme géométrique $\mathbf{R}$, et, à ce titre, sera orthogonal à Δ : il en résulte que la projection du moment résultant aux divers points d'une droite (préalablement orientée) sur cette droite, a une valeur algébrique constante, qu'on appelle moment du système des vecteurs $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ par rapport à cette droite.

Ces préliminaires posés, nous allons étudier le problème suivant :

On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$, *et un système de vecteurs dont on donne :*

1° *les composantes* A, B, C *suivant ces axes de la somme géométrique ;*

2° *les composantes* L, M, N *suivant ces axes du moment résultant relatif au point* O.

Trouver les axes sur lesquels la projection du moment résultant est nulle.

Considérons un axe Δ passant par le point O' (x_0, y_0, z_0) et de cosinus α, β, γ. Le moment résultant en O' (soit $\mathbf{OG} + \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{R}$) aura pour composantes

$$L - (y_0C - z_0B), \qquad M - (z_0A - x_0C), \qquad N - (x_0B - y_0A)$$

et sa projection sur l'axe Δ sera

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + A(y_0\gamma - z_0\beta) + B(z_0\alpha - x_0\gamma) + C(x_0\beta - y_0\alpha).$$

Dans cette expression, les coefficients de L, M, N, A, B, C sont les coordonnées de Plücker de l'axe. La condition demandée *pour qu'un axe soit de moment nul* se traduit donc par une relation linéaire et homogène entre les six coordonnées de Plücker de cet axe. Inversement, en appelant α, β, γ, λ, μ, ν les coordonnées de Plücker d'un axe Δ, toute relation linéaire et homogène

$$(1) \qquad L\alpha + M\beta + N\gamma + A\lambda + B\mu + C\nu = 0$$

entre ces six quantités exprimera que l'axe en question est de moment nul relativement aux systèmes de vecteurs dont la résultante et le moment résultant sont respectivement (A, B, C) et (L, M, N).

Il est d'usage d'appeler COMPLEXE DE DROITES toute famille de droites à trois paramètres. En établissant une relation homogène entre les coordonnées de Plücker d'une droite, on obtiendra donc un *complexe*. Dans le cas où cette relation est obtenue en annulant un polynome homogène et de degré n, on dira qu'on a un complexe d'ordre n. En particulier, l'équation générale (1) caractérise tous les complexes linéaires, qui forment une famille à cinq paramètres.

Nous venons de voir que *tout complexe linéaire se ramène à un système de droites de moment nul.* Nous avons d'ailleurs supposé implicitement que le système des n vecteurs envisagés au début n'est pas équivalent à un vecteur unique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de droite D ayant pour coordonnées plückériennes A, B, C, L, M, N, ou encore que $LA + MB + NC$ n'est pas nul. Sans quoi, l'équation (1) caractériserait l'ensemble des axes Δ s'appuyant sur une telle droite D (complexe spécial).

Etant donné UN COMPLEXE D'ORDRE n, défini par la relation

$$(2) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) = 0,$$

le lieu des droites

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

appartenant à ce complexe et passant au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un cône, appelé *cône du complexe* (de sommet M_0). Pour trouver son équation, remplaçons dans (2) λ, μ, ν par leurs valeurs

$$y_0\gamma - z_0\beta, \qquad z_0\alpha - x_0\gamma, \qquad x_0\beta - y_0\alpha,$$

l'équation (2) deviendra homogène en α, β, γ. L'équation du cône s'obtient alors immédiatement en y remplaçant α, β, γ par les quantités proportionnelles $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. On obtient ainsi

$$f(x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0, \quad y_0z - z_0y, \quad z_0x - x_0z, \quad x_0y - y_0x) = 0.$$

On voit d'après cela que le cône d'un complexe d'ordre n est lui-même un cône d'ordre n.

Dans le cas particulier du complexe linéaire, ce cône se réduira au plan

$$\begin{aligned}(3)\qquad \mathrm{L}(x - x_0) + \mathrm{M}(y - y_0) + \mathrm{N}(z - z_0)&\\ + \mathrm{A}(y_0z - z_0y) + \mathrm{B}(z_0x - x_0z) + \mathrm{C}(x_0y - y_0x) &= 0,\end{aligned}$$

qui est justement (comme il est évident géométriquement) le plan perpendiculaire au moment résultant en O.

Revenant un instant aux complexes généraux, nous appellerons *courbe du complexe* dans un plan l'enveloppe des droites du complexe situées dans ce plan. Cette courbe est de classe n, car les tangentes menées à cette courbe d'un point du plan sont les génératrices du cône du complexe ayant pour sommet ce point et situées dans ce plan. Dans le cas d'un complexe linéaire, la classe de la courbe du complexe relative à un plan quelconque est l'unité. Donc *toutes les droites d'un complexe linéaire situées dans un plan passent par un point fixe* (qui, dans notre interprétation par les moments, est le point unique où le moment résultant est normal au plan).

Au moyen du complexe linéaire, nous pouvons donc définir une correspondance entre un point et un plan, de manière :

1° *qu'à chaque point corresponde un plan et un seul;*

2° *qu'à chaque plan corresponde un point et un seul;*

3° *que le plan qui correspond à un point contienne ce point.*

Inversement, appelons ξ, η, ζ, θ les coordonnées homogènes d'un point et u, v, w, r les coordonnées tangentielles du plan qui lui correspond. Supposons qu'on passe du point au plan par les formules linéaires

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta + a_4\theta,\\ v &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta + b_4\theta,\\ w &= c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_4\theta,\\ r &= d_1\xi + d_2\eta + d_3\zeta + d_4\theta\end{aligned}\right.$$

et que le point soit contenu dans le plan :

$$u\xi + v\eta + w\zeta + r\theta = 0.$$

Il s'ensuit aisément que dans les équations (4), le tableau des coefficients des seconds membres est un tableau *symétrique gauche* [1]. En revenant aux coordonnées non homogènes, à un point x, y, z, nous ferons donc correspondre un plan dont les coefficients seront de la forme

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} u &= L - (yC - zB), \\ v &= M - (zA - xC), \\ w &= N - (xB - yA), \\ r &= -Lx - My - Nz. \end{aligned} \right.$$

En munissant les x, y, z des seconds membres de l'indice zéro, on voit que le plan

$$ux + vy + wz + r = 0$$

coïncidera précisément avec le plan (3). D'où un nouveau mode de génération du complexe linéaire : il consiste à associer un point et un plan de manière que les coordonnées tangentielles du plan soient des formes linéaires des coordonnées homogènes du point et que le plan contienne le point.

En généralisant la terminologie utilisée dans l'étude des quadriques, nous appellerons encore *plan polaire* d'un point le plan associé à ce point et nous dirons que ce point est le pôle du *plan*. De la forme des équations (4) ou (4'), il résulte que si un point décrit une droite D, son plan polaire tourne autour d'une seconde droite Δ. On peut le voir aussi géométriquement. Soient M_1 et M_2 deux points de D, dont les plans polaires se coupent suivant Δ : toute droite issue de M_1 et rencontrant Δ appartient au complexe ; de même toute droite issue de M_2 et rencontrant Δ. Donc le plan polaire de tout point de la droite Δ est déterminé par les droites joignant ce point à M_1 et M_2. Il contient donc la droite M_1M_2. Sous cette forme apparaît la réciprocité entre D et Δ : on dit que ces droites sont conjuguées par rapport au complexe.

On voit aussi que les droites du complexe rencontrant une droite D rencontrent également sa conjuguée Δ. On obtient ainsi une famille de droites à deux paramètres, ou, comme on dit, une CONGRUENCE. La congruence dont il s'agit ici (formée des droites s'appuyant sur deux droites fixes) est telle que par chaque point il passe une droite et une seule de cette congruence, et que dans chaque plan, il y a aussi une droite et une seule de la congruence [2].

---

[1] Toute correspondance entre un point et un plan définie par des formules du type (4) constitue une *corrélation*. Les transformations par polaires réciproques sont les corrélations particulières où les seconds membres des formules (4) sont les dérivées partielles d'une même forme quadratique. Le tableau est alors symétrique par rapport à sa diagonale principale.

[2] Si l'on considère la congruence des cordes d'une cubique gauche, il

Ainsi que nous l'avons vu, les complexes linéaires dépendent de cinq paramètres. En imposant à un complexe linéaire d'admettre pour un plan donné un pôle donné, on le soumet à deux conditions d'égalité. En donnant les pôles de deux plans, les coefficients de l'équation du complexe seront déterminés à un paramètre près, figurant au premier degré. On aura ainsi *le faisceau de complexes*

$$(L_0 + \rho L_1)\alpha + (M_0 + \rho M_1)\beta + (N_0 + \rho N_1)\gamma$$
$$+ (X_0 + \rho X_1)\lambda + (Y_0 + \rho Y_1)\mu + (Z_0 + \rho Z_1)\nu.$$

Tous ces complexes ont en commun une congruence, formée des droites communes aux deux complexes

$$L_0\alpha + \cdots + Z_0\nu = 0, \qquad L_1\alpha + \cdots + Z_1\nu = 0.$$

Cette congruence sera formée des droites s'appuyant sur les deux suivantes :

1° celle qui joint les deux pôles donnés ;

2° celle qui forme l'intersection des deux plans associés.

On obtiendra analytiquement les coordonnées de Plücker de ces deux droites en déterminant ρ par la condition

$$(L_0 + \rho L_1)(X_0 + \rho X_1) + (M_0 + \rho M_1)(Y_0 + \rho Y_1) + (N_0 + \rho N_1)(Z_0 + \rho Z_1) = 0.$$

Pour achever la détermination du complexe, on donnera une droite quelconque en faisant partie. Je laisse au lecteur le soin de résoudre ce problème :

Connaissant une droite d'un complexe linéaire et les pôles de deux plans ne contenant pas cette droite, trouver le plan polaire d'un point quelconque de l'espace.

Observons, pour clore ces préliminaires, qu'il est établi, par les considérations des deux dernières pages, que la notion de complexe linéaire appartient à la géométrie projective (ce qui n'était pas évident lorsqu'on se plaçait au point de vue des vecteurs glissants). On montrerait d'ailleurs aisément qu'en transformant un complexe linéaire par polaires réciproques ([1]), on obtient un nouveau complexe linéaire.

298. Soit une courbe algébrique gauche. *Supposons que ses tangentes appartiennent au complexe linéaire défini par l'équation*

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + A\lambda + B\mu + C\nu = 0.$$

La tangente au point (x, y, z) porte le vecteur de composantes $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ dont le moment par rapport à l'origine a pour com-

---

passe par un point une droite et une seule de la congruence, mais dans chaque plan, il y a trois droites de la famille.

([1]) Ou, plus généralement, par une corrélation.

posantes

$$y\frac{dz}{du}-z\frac{dy}{du},\qquad z\frac{dx}{du}-x\frac{dz}{du},\qquad x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}.$$

Donc, notre hypothèse sur la courbe se traduit par l'identité

$$A\left(y\frac{dz}{du}-z\frac{dy}{du}\right)+B\left(z\frac{dx}{du}-x\frac{dz}{du}\right)+C\left(x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}\right)$$
$$+L\frac{dx}{du}+M\frac{dy}{du}+N\frac{dz}{du}=0.$$

En différentiant, nous obtenons identiquement

$$A\left(y\frac{d^2z}{du^2}-z\frac{d^2y}{du^2}\right)+B\left(z\frac{d^2x}{du^2}-x\frac{d^2z}{du^2}\right)+C\left(x\frac{d^2y}{du^2}-y\frac{d^2x}{du^2}\right)$$
$$+L\frac{d^2x}{du^2}+M\frac{d^2y}{du^2}+N\frac{d^2z}{du^2}=0.$$

De ces deux relations, la première exprime (nécessairement) que le vecteur $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ mené du point (x, y, z) est contenu dans le plan polaire du complexe relatif à ce point. Donc la seconde exprime la même propriété pour le vecteur $\frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^2y}{du^2}, \frac{d^2z}{du^2}$. D'où ce résultat :

Si les tangentes à une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur en chaque point se confond avec le plan polaire du complexe relatif à ce point.

299. Revenant maintenant aux cubiques gauches, nous allons établir le théorème suivant :

Étant donnée une cubique gauche, il existe un complexe linéaire contenant toutes ses tangentes.

En effet, appelons X, Y, Z, T les coordonnées homogènes d'un point de la courbe : ce seront des polynomes du troisième degré en u. Nous aurons

$$dx=d\left(\frac{X}{T}\right)=\frac{TdX-XdT}{T^2},\qquad \ldots,$$

$$ydz-zdy=\frac{Y}{T}\,d\left(\frac{Z}{T}\right)-\frac{Z}{T}\,d\left(\frac{Y}{T}\right)=\frac{YdZ-ZdT}{T^2},\qquad \ldots,\qquad \text{etc...}$$

or les six quantités

$$T\frac{dX}{du}-X\frac{dT}{du},\qquad \ldots,\qquad Y\frac{dZ}{du}-Z\frac{dT}{du},\qquad \ldots$$

sont du quatrième degré en u. Donc, en portant ces valeurs des coordonnées de Plücker d'une tangente dans le premier membre de l'équa-

tion d'un complexe linéaire à coefficients indéterminés, on aura un polynome du quatrième degré en u. Son annulation identique donne cinq équations homogènes, qui définissent des valeurs proportionnelles aux coefficients de l'équation. (C. Q. F. D.)

300. On peut rattacher à la considération des plans osculateurs d'une cubique gauche un mode de génération du complexe linéaire, découvert par M. Paul Appell.

Cherchons les plans osculateurs menés par un point A à une cubique gauche. Un exemple traité au n° 62 montre immédiatement que le problème admet trois solutions, et le résultat est général, en raison de la possibilité de transformer homographiquement toutes les cubiques gauches en l'une d'elles. Ce résultat s'explique aisément : les plans tangents à la cubique menés par le point A enveloppent un cône Γ du troisième ordre, ayant pour sommet le point A et pour directrice la cubique. L'un de ces plans tangents a en commun avec la cubique son point de contact M et un autre point P. Entre ces points, sur la cubique, existe une correspondance (2, 1) (qu'on pourra ramener à une correspondance (2, 1) entre plans déterminés par l'un des points M et P et une corde fixe BC de la cubique). Il s'ensuit que cette correspondance admet trois éléments doubles, qui fournissent justement les trois plans osculateurs menés de A. Considérons une section plane du cône Γ : c'est une cubique unicursale, dont les trois points d'inflexion alignés sont sur les droites joignant le point A aux points de contact des plans osculateurs menés de ce point. Il s'ensuit que le point A et ces trois points de contact sont dans un même plan.

D'où un mode de génération du complexe linéaire, dû à M. Appell (¹).

On prend une cubique gauche, et on fait correspondre à chaque point M *de l'espace le plan contenant, en même temps que* M, *les contacts des plans osculateurs menés de* M *à cette courbe : ce plan est le plan polaire du point* M *à cette courbe.*

301. Les deux classes de quartiques gauches. — Soit une courbe algébrique du quatrième ordre. Une quadrique contenant neuf points de cette courbe la contient tout entière. Il y a alors deux éventualités possibles :

1° Il passe par la courbe une infinité de quadriques, formant un faisceau ponctuel ; la courbe est donc une *biquadratique gauche*.

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1876.

Pour un autre mode de génération, voir un article de Mlle Grumeau, *Bull. de la Soc. Math. de France*, année 1923, t. 50, p. 239.

2° Il ne passe par la courbe qu'une seule quadrique : la courbe est dite alors *monoquadratique.*

Le premier de ces cas ayant été suffisamment approfondi, nous allons porter notre attention sur le second. Toutefois, il nous sera commode de développer, relativement aux lignes tracées sur une quadrique, quelques remarques préliminaires.

Soit C une courbe algébrique gauche d'ordre n tracée sur une quadrique. Prenons sur cette surface un point de vue quelconque O et adoptons à notre guise un plan du tableau Π. Soit M un point de la quadrique. Faisons-lui correspondre la trace P de la droite OM sur le plan Π. Nous aurons entre le point M et le point P une correspondance biunivoque, et dans laquelle les coordonnées de chacun des deux points M et P peuvent s'évaluer rationnellement en fonction de celles de l'autre. Supposons que O ne soit pas sur C.

A la courbe C de la quadrique va correspondre ainsi une courbe D de même degré du plan Π. Menons les deux génératrices rectilignes OA, OB qui déterminent le plan tangent en O à la quadrique, et soient A, B leurs traces sur le plan Π. L'image d'une génératrice du même système que OB sera dans le plan Π une droite issue de A ; et l'image d'une génératrice du système contenant OA sera une droite issue de B. Supposons que OA rencontre C en α points et que OB la rencontre en β points, $\alpha+\beta$ sera égal à l'ordre n de la courbe C. Il est clair que la courbe D admettra le point A à l'ordre de multiplicité α, et le point B à l'ordre de multiplicité β. Une droite arbitraire issue de A coupe donc D en β points distincts de A, ce qui revient à dire que les génératrices de la quadrique du même système que OB coupent C en un nombre invariable β de points. Pareillement, les génératrices de même système que OA la couperont en α points.

Cela posé, prenons pour C une biquadratique. Nous aurons $\alpha=2$, $\beta=2$, car les points d'intersection d'une génératrice du système OA ou du système OB avec C sont aussi les points où la génératrice en question perce une seconde quadrique.

Je dis que la réciproque est vraie : *une quartique tracée sur une quadrique Q et rencontrant en deux points chaque génératrice est une biquadratique.*

En effet, à une telle courbe C correspondra dans le plan Π, par la transformation précédente, une courbe D de même degré, admettant A et B comme points doubles. Par suite, le point P du plan Π décrivant la courbe D, les deux droites AP et BP seront liées par une correspondance (2, 2). Donc les courbes D qu'on obtient de cette manière dans le plan Π dépendent de huit paramètres, et, à ce titre, s'identifient avec les projections coniques faites de O des biquadratiques de Q (car le degré d'indétermination des biquadratiques

d'une quadrique est le même que celui d'un faisceau ponctuel, c'est-à-dire 8) [1].

302. Considérons maintenant une quartique monoquadratique. D'après le théorème précédent, α et β, dont la somme est égale à 4, ne peuvent être égaux à 2. Donc l'un de ces entiers est nécessairement égal à 1 et l'autre à 3.

D'après cela, envisageons le cône ayant pour sommet un point A de la monoquadratique. Soient AG, AH les deux génératrices issues de A sur la quadrique, soit AG celle qui coupe la quartique en trois points. Le cône ayant pour sommet A et pour directrice cette courbe admettra AG comme génératrice double. Par ce procédé, une monoquadratique se trouve définie comme intersection incomplète d'une quadrique et d'un cône du troisième degré.

Mais le fait le plus important est l'existence, pour une telle courbe, d'une famille à un paramètre de sécantes triples (lesquelles engendrent la quadrique passant par la courbe). Le faisceau des plans passant par l'une de ces sécantes ne coupe la courbe qu'en un seul point variable. Il s'ensuit que toute *monoquadratique* est unicursale. On pourrait d'ailleurs l'engendrer aussi par une correspondance (3, 1) entre deux rayons variables issus chacun d'un point fixe dans le plan II.

303. Surfaces du troisième ordre. — Les indications que nous allons donner sur les surfaces des ordres trois et quatre ont simplement pour but d'attirer l'attention sur quelques cas particulièrement saillants. Elles ne visent nullement à constituer une théorie systématique de ces surfaces.

Nous nous baserons, pour classer les surfaces du troisième ordre, sur l'absence ou sur la présence de points singuliers ou de lignes singulières.

On peut faire immédiatement les remarques suivantes :

Une surface cubique ayant un point d'ordre trois est un cône ayant pour sommet ce point.

Une surface cubique dépourvue de ligne singulière peut admettre jusqu'à quatre points doubles isolés. Tout d'abord, il est manifeste qu'il ne peut exister plus de trois points doubles dans un même plan, de plus, ces points ne peuvent être alignés : en effet, soit une surface

---

[1] De ce raisonnement, en utilisant un théorème précédemment établi (nº 284), on déduira aisément cette proposition : le rapport anharmonique des quatre plans tangents menés par une génératrice d'une quadrique à une biquadratique tracée sur cette quadrique a une valeur constante, la même pour les deux systèmes de génératrices. D'où résulte la constance du rapport anharmonique des quatre plans tangents menés à une biquadratique par une de ses cordes.

cubique admettant deux points doubles isolés A et B; la droite qui les joint lui appartient tout entière et les sections de la surface dont les plans contiennent AB sont des coniques passant par A et B, elles ne peuvent donc rencontrer AB ailleurs qu'en A et B qui, seuls, sont points doubles sur AB.

Cela posé, envisageons une surface cubique ayant pour points doubles les sommets A, B, C d'un triangle. Nous pouvons toujours (en transformant homographiquement) nous ramener au cas où A, B, C sont les points à l'infini des axes. L'équation de la surface prend alors la forme

$$xyz + ayz + a'zx + a''xy + bx + b'y + b''z + c = 0.$$

Il est clair que les coefficients pourront être déterminés de manière qu'un nouveau point arbitraire, par exemple l'origine, devienne point double. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait $b = b' = b'' = c = 0$. On ne peut aller au delà. Quoi qu'il en soit, on voit qu'*il existe des surfaces du troisième ordre* (dépendant de trois paramètres) *contenant les arêtes d'un tétraèdre et ayant ses quatre sommets pour points doubles.*

Lorsqu'une surface cubique possède une ligne singulière, cette ligne est algébrique et ne peut être coupée par un plan qu'en un seul point, car une surface cubique indécomposée admet en général pour section des courbes du troisième ordre indécomposées et n'ayant à ce titre qu'un point singulier au plus. Donc une ligne singulière d'une surface cubique est nécessairement une droite.

Une développable algébrique engendrée par les tangentes à une courbe gauche algébrique admet cette courbe comme ligne singulière. De ce qui précède, on conclut que les seules surfaces développables du troisième ordre sont des cônes.

304. Considérons maintenant *une surface cubique admettant une droite double* D (l'hypothèse d'une droite triple mènerait à la décomposition en trois plans passant par une droite). Toute section de la surface par un plan passant par D comprendra deux fois la droite D et une fois une autre droite Δ, qui variera en même temps que le plan P. Une telle surface sera donc réglée. Désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 quatre positions de Δ : la droite D rencontre à la fois Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, mais il existe une autre droite D′ possédant la même propriété ; comme elle a quatre points communs avec notre surface, elle y est tout entière contenue. D'ailleurs chacun de ses points est simple. Soient M et M′ les points où une génératrice variable Δ rencontre D et D′. La correspondance entre ces points est algébrique. De plus, à chaque position de M′ sur D′ correspond une seule position de M sur D,

puisque le plan (D, M′) coupe la surface suivant une seule droite distincte de D; par contre, à une position de M sur D correspondent deux positions de M′ sur D′, car le plan (D′, M) coupe la surface suivant un couple de génératrices distinctes de D′. Les deux points M et M′ sont donc liés par une correspondance (2, 1).

Réciproquement, *toute surface réglée non développable du troisième ordre peut être engendrée de la manière précédente.* En effet, supposons que le lieu de la famille continue de droites

$$x = a(\lambda)z + (p\lambda), \qquad y = b(\lambda)z + q(\lambda)$$

soit une surface cubique. Les fonctions a, b, p, q du paramètre λ seront algébriques et, par suite, on pourra toujours délimiter un intervalle de variation de λ où elles soient continues ainsi que leurs dérivées. La théorie générale des surfaces réglées sera donc applicable dans cet intervalle. Soit G_λ une génératrice provenant d'une valeur de l'intervalle. Un plan passant par G_λ coupe la surface suivant une conique ayant en commun avec G_λ deux points, dont l'un est nécessairement le point de contact de ce plan ; l'autre ne peut donc provenir que de la présence sur la surface d'une ligne double, qui, nous le savons, sera nécessairement une droite. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude qui précède et la proposition énoncée est établie.

En résumé, toute surface réglée du troisième ordre est le lieu d'une droite joignant deux points en correspondance (2, 1) sur deux droites fixes D et D′. Par une transformation homographique rejetant D′ à l'infini, on peut se ramener à l'étude d'un conoïde.

Comme exemple de surface réglée du troisième ordre, importante dans divers problèmes de géométrie métrique, citons le *conoïde de Plücker*

$$z = a\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

On pourra établir, à titre d'exercice, que la projection orthogonale d'un point de l'espace sur les génératrices est une courbe plane. On démontre que le conoïde de Plücker est la seule surface réglée non cylindrique possédant ce caractère.

Pour l'étude détaillée de ses propriétés géométriques, nous renverrons à l'ouvrage cité de M. Ch. Michel, chap. XVII.

305. Occupons-nous maintenant des *surfaces cubiques ayant un nombre fini de génératrices rectilignes.* On prévoit que la présence éventuelle de points singuliers isolés ou de plans tangents à la surface tout le long d'une droite exercera une influence sur ce nombre. Il est facile de le vérifier sur des exemples.

Considérons d'abord la surface de révolution

$$z(x^2+y^2)=a^3t^3.$$

A ce titre, les seules génératrices rectilignes qu'elle puisse admettre sont dans le plan de l'infini (car en tournant autour de Oz une droite à distance finie engendrerait une quadrique). On trouve ainsi trois droites

$$\begin{cases} x+iy=0, \\ t=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-iy=0, \\ t=0; \end{cases} \quad \begin{cases} z=0, \\ t=0, \end{cases}$$

le long de chacune desquelles la surface admet partout le même plan tangent, qui coupe d'ailleurs la surface suivant trois droites confondues avec cette génératrice. Le point à l'infini de la surface sur Oz est un point singulier, ainsi que les points à l'infini sur les droites $x-iy=z=0$ et $x+iy=z=0$. La présence simultanée de trois points singuliers est aggravée par la nature de ces points où le cône des tangentes se décompose en deux plans, chacun de ces plans se trouvant précisément en contact du second ordre, avec la surface, tou le long d'une droite.

On trouverait des résultats tout à fait pareils en cherchant les génératrices de la surface

$$xyz=a^3t^3,$$

ou, plus généralement, de la surface

$$XYZ=T^3,$$

X, Y, Z, T étant les premiers membres des équations de quatre plans formant un tétraèdre.

Considérons encore la surface inverse d'un cône du second degré par rapport à l'un de ses points O, distinct du sommet S, avec la puissance d'inversion $\overline{OS}^2$: c'est une surface cubique ayant O et S pour points doubles ; la droite OS est une première génératrice le long de laquelle le plan tangent coïncide partout avec le plan tangent au cône (circonstance dont nous avons déjà noté le caractère singulier) ; les autres génératrices sont les inverses des sections circulaires, réelles ou imaginaires, du cône, dont les plans passent par O. Nous trouvons donc ici trois génératrices rectilignes réelles et quatre imaginaires.

Soit maintenant la surface

$$xyz+ayz+a'zx+a''xy+bx+b'y+b''z+c=0,$$

qui a pour points doubles les points à l'infini des axes. Elle a donc trois génératrices dans le plan de l'infini. Toute autre génératrice sera parallèle à l'un des plans de coordonnées, car en cherchant les géné-

ratrices non parallèles au plan xOy sous la forme

$$x = \alpha z + \lambda, \qquad y = \beta z + \mu,$$

on trouve qu'un au moins des coefficients α, β doit être nul. Cherchons notamment les génératrices parallèles au plan yOz : nous devrons annuler le discriminant $\Delta(x)$ de la conique section par un plan $x = \text{const.}$, d'où l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} 0 & x+a & a''x+b' \\ x+a & 0 & a'x+b'' \\ a''x+b' & a'x+b'' & 2(bx+c) \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$(x+a)\left[(a'x+b'')(a''x+b') - (x+a)(bx+c)\right] = 0.$$

La solution $x+a=0$ ne nous donne à distance finie qu'une seule génératrice rectiligne, mais chacune des deux autres racines donne un système de deux droites parallèles au plan yOz. Nous trouvons donc ici quinze génératrices à distance finie, en surplus des trois génératrices à l'infini dans les plans de coordonnées.

Dans le cas où l'on a $b = b' = b'' = c = 0$, l'équation précédente se reduit à

$$x^2(x+a) = 0,$$

et on obtient, en dehors des six arêtes du tétraèdre contenues sur la surface cubique, trois autres génératrices

$$\begin{cases} x+a=0, \\ a'z+a''y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y+a'=0, \\ az+a''x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z+a''=0, \\ ay+a'x=0 \end{cases}$$

(le tétraèdre dont il s'agit ayant ici trois sommets rejetés à l'infini).

Ces exemples montrent clairement l'influence des points singuliers ou de plans touchant la surface tout le long d'une droite.

306. Passons au cas général et supposons qu'on ait obtenu une première génératrice rectiligne. En exprimant la décomposition de la conique obtenue en coupant la surface par un plan contenant cette droite, on pourra obtenir un triangle de génératrices rectilignes. Supposons cela réalisé, et, par une transformation homographique, ramenons-nous au cas où les côtés de ce triangle sont définis par les équations

$$x = t = 0, \qquad y = t = 0, \qquad z = t = 0.$$

En revenant aux coordonnées non homogènes, l'équation de la surface prendra la forme

$$2xyz + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz \\ + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

On verra comme précédemment que toute génératrice à distance finie est parallèle à l'un des plans de coordonnées. Pour trouver, par

exemple, les génératrices parallèles au plan yOz, nous serons conduits à écrire

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} A' & B+x & C'+B''x \\ B+x & A'' & C''+B'x \\ C'+B''x & C''+B'x & Ax^2+2Cx+D \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation est du quatrième degré. Il y a donc huit génératrices à distance finie parallèles à chacun des plans de coordonnées, ce qui fait en tout, à distance finie ou à l'infini, vingt-sept génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires.

Considérons par exemple la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

On peut écrire son équation sous la forme

$$(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = (1-z)(1-\omega z)(1-\omega^2 z),$$

en désignant par ω une racine cubique imaginaire de l'unité. On trouve ainsi immédiatement neuf génératrices rectilignes

$$\left\{\begin{aligned} x+y&=0,\\ 1-z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+y&=0,\\ 1-\omega z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+y&=0,\\ 1-\omega^2 z&=0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x+\omega y&=0,\\ 1-z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+\omega y&=0,\\ 1-\omega z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+\omega y&=0,\\ 1-\omega^2 z&=0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x+\omega^2 y&=0,\\ 1-z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+\omega^2 y&=0,\\ 1-\omega z&=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x+\omega^2 y&=0,\\ 1-\omega^2 z&=0.\end{aligned}\right.$$

En permutant circulairement x, y, z on trouve alors deux autres ensembles de neuf génératrices rectilignes. Cette surface compte donc bien vingt-sept génératrices.

D'une manière générale, lorsque l'équation de la surface sera donnée sous la forme

$$XYZ = UVW,$$

où les grandes lettres désignent des formes linéaires en x, y, z, t, on aura immédiatement neuf génératrices, ce qui facilitera les calculs précédents. A titre d'application, on pourra chercher les génératrices à distance finie ds la surface

$$xyz = (ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d'),$$

au nombre desquelles sont les six droites

(1) $x = 0, \quad by+cz+d = 0;$
(2) $x = 0, \quad b'y+c'z+d' = 0;$
(3) $y = 0, \quad cz+ax+d = 0;$
(4) $y = 0, \quad c'z+a'x+d' = 0;$
(5) $z = 0, \quad ax+by+d = 0;$
(6) $z = 0, \quad a'x+b'y+d' = 0.$

On connaîtra donc une racine de chacune des équations telles que $\Delta(x) = 0$.

307. Relativement à la *détermination d'une surface générale du troisième degré,* nous nous bornerons aux indications suivantes :

Une telle surface dépend de dix-neuf paramètres. Considérons deux trièdres T et T′ situés l'un par rapport à l'autre d'une manière quelconque. On démontre aisément qu'en assujettissant une surface du troisième degré à contenir les neuf droites communes à ces deux trièdres, on lui impose dix-huit conditions. Les surfaces remplissant la condition indiquée forment donc un faisceau linéaire ponctuel, dont deux surfaces quelconques se coupent suivant nos neuf droites.

Soient

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

les équations des faces du trièdre T ;

$$X' = 0, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = 0$$

les équations des faces du trièdre T′. L'équation générale des surfaces du troisième ordre passant par les neuf droites en question sera

$$XYZ = \lambda X'Y'Z'.$$

On voit d'après cela que, pour déterminer géométriquement une surface du troisième degré, il suffit de donner neuf droites de la surface, constituant l'intersection de deux trièdres, et un point.

On peut encore dire : la donnée simultanée de deux trièdres représente dix-huit conditions; les transformations homographiques dépendent de quinze paramètres : un système de deux trièdres a donc trois invariants projectifs, une surface cubique en a quatre, etc.

308. *Toute surface du troisième ordre est unicursale.*

Soit une surface du troisième ordre : si elle admet un point double, il suffit, pour en obtenir une représentation rationnelle, de la couper par une droite passant par ce point double.

Si elle n'admet aucun point double, on prendra sur la surface deux génératrices non situées dans un même plan. Par chaque point M de la surface, on peut alors mener une droite et une seule s'appuyant sur ces deux génératrices. D'où une représention rationnelle de la surface.

Prenons comme exemple la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

et les deux génératrices

$$\begin{cases} x + \omega y = 0, \\ 1 - \omega z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \omega^2 y = 0, \\ 1 - \omega^2 z = 0. \end{cases}$$

Un point de la première a des coordonnées $(-\omega u, u, \omega^2)$, un point de la seconde $(-\omega^2 v, v, \omega)$. Les coordonnées x, y, z d'un point se calculeront en adjoignant à l'équation de la surface les équations de la droite joignant les deux points précédents. En posant

$$u = \alpha + \beta\omega^2, \qquad v = \alpha + \beta\omega,$$

α, β désignant des valeurs réelles, notre droite joindra les deux points conjugués $(-\beta - \alpha\omega, \alpha + \beta\omega^2, \omega^2)$ et $(-\beta - \alpha\omega^2, \alpha + \beta\omega, \omega)$, dont le milieu est le point $\left(-\beta + \frac{\alpha}{2}, \alpha - \frac{\beta}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et dont les paramètres directeurs peuvent être pris égaux à α, β, 1, etc...

309. Surfaces du quatrième ordre. — Afin de ne pas dépasser le cadre que nous nous sommes tracé, nous donnerons seulement des exemples de surfaces du quatrième ordre en adoptant le fil directeur suivant : nous nous attacherons de préférence à l'étude des *surfaces présentant des lignes singulières*. Nous obtiendrons ainsi une classe déjà fort étendue comprenant notamment les surfaces réglées du quatrième ordre, les cyclides et les inverses des quadriques.

En raisonnant comme dans le cas des surfaces du troisième ordre, on trouve immédiatement le résultat suivant :

La somme des ordres des lignes singulières situées sur une surface du quatrième degré ne peut dépasser trois.

D'autre part, la méthode employée à la recherche des surfaces réglées du troisième ordre s'applique à la recherche des SURFACES RÉGLÉES DU QUATRIÈME : un plan passant par une génératrice détermine en outre dans la surface une cubique coupant cette génératrice en trois points : deux de ces points seront singuliers sur la surface, le troisième jouant le rôle de point de contact du plan avec la surface. Donc toute surface réglée du quatrième ordre admet un système de lignes singulières, d'ordre total $\leqslant 3$, sur lequel chaque génératrice s'appuie en deux points. On a alors divers cas possibles : ou bien, *la ligne singulière est une cubique gauche,* auquel cas la surface est engendrée par des cordes de la cubique ; ou bien la surface admet une *droite triple* ; ou encore elle est engendrée par des droites s'appuyant sur deux droites doubles fixes ; on peut avoir aussi deux droites doubles confondues ; enfin, nous rencontrerons des surfaces engendrées par une droite s'appuyant sur une droite double et une conique double.

310. Surfaces quartiques engendrées par les cordes d'une cubique gauche. — Toute surface quartique admettant une cubique gauche comme ligne double est nécessairement réglée, puisque la corde unique de la cubique passant par un point de la surface a cinq points

en commun avec celle-ci. On peut toujours, par une transformation homographique, se ramener au cas où la cubique singulière est

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Toute génératrice est alors une droite joignant deux points u, u^2, u^3 et v, v^2, v^3; elle sera donc représentée par des équations de la forme

$$2x - (u+v) = \frac{2y - (u^2+v^2)}{u+v} = \frac{2z - (u^3+v^3)}{u^2+uv+v^2};$$

en posant $\qquad u+v = \alpha, \qquad uv = \beta,$

on peut également écrire ces droites sous la forme

$$(d) \qquad x = \frac{y+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha y - z}{\beta},$$

d'où l'on tire les valeurs de α et β caractérisant la corde passant au point (x, y, z)

$$\alpha = \frac{z - xy}{y - x^2}, \qquad \beta = \frac{xz - y^2}{y - x^2}.$$

Toute surface lieu de cordes de la cubique sera déterminée par une équation de condition $\qquad f(\alpha, \beta) = 0.$
Si f est de degré m par rapport à l'ensemble des variables α, β, on aura une surface de degré $2m$. En particulier, nous aurons les surfaces les plus générales du quatrième degré de l'espèce considérée, en supposant que le point (α, β) décrive dans son plan une conique

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha + 2E\beta + F = 0.\ [1]$$

L'équation générale des surfaces quartiques engendrées par les cordes de la cubique $y = x^2$, $z = x^3$ (cubique qui détermine le réseau comprenant les trois quadriques

$$y - x^2 = 0, \qquad z - xy = 0, \qquad xz - y^2 = 0)$$

est donc

$$\begin{aligned} A(z - xy)^2 + 2B(z - xy)(xz - y^2) + C(xz - y^2)^2 \\ + 2D(z - xy)(y - x^2) + 2E(xz - y^2)(y - x^2) + F(y - x^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

D'une manière générale, en appelant $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ trois des quadriques du réseau déterminé par une cubique gauche, l'équation homogène et du second degré $f(P, Q, R) = 0$ sera celle des surfaces quartiques réglées engendrées par les cordes de la cubique.

Notamment, en joignant deux points en correspondance homographique sur la cubique, on obtiendra une classe particulière des surfaces précédentes. Si l'homographie se réduit à une involution,

[1] Cette équation de condition entre α et β *équivaut* à une relation linéaire et homogène entre les coordonnées de Plücker de (d). D'où un mode de génération de nos surfaces comme *lieu de cordes d'une cubique gauche appartenant à un complexe linéaire donné.*

il y a dégénérescence et on obtient une quadrique passant par la cubique gauche.

Enfin, une homographie peut être symétrique sans être une involution : elle se réduit alors à la relation identique $u=v$. Dans ce cas, on obtient le lieu des tangentes à la cubique gauche. Reprenons le cas de la courbe $y=x^2$, $z=x^3$. Le lieu de ses tangentes correspond dans le plan α, β à la conique

$$\alpha^2-4\beta=0;$$

c'est donc la surface

$$(z-xy)^2-4(xz-y^2)(y-x^2)=0.$$

D'où ce théorème :

Il existe, en dehors des cônes, une seule famille de développables du quatrième ordre, engendrées par les tangentes à une cubique gauche.

311. Surfaces quartiques réglées présentant deux droites doubles. — Soient deux droites fixes D et D′, non situées dans un même plan. Si une surface du quatrième ordre les admet pour droites doubles, elle est nécessairement réglée, car la droite menée par un point de cette surface et s'appuyant sur D et D′ a déjà cinq points communs avec la surface. Appelons Δ une génératrice variable qui rencontre D en M et D′ en M′. A chaque position du point M sur D correspondront deux positions du point M′ sur D′ et inversement. Donc la correspondance entre M et M′ est de l'espèce (2, 2). D'où un mode de génération de ces surfaces. Soient λ, μ les paramètres qui déterminent les positions de M sur D et de M′ sur D′. Si la relation $f(\lambda, \mu)=0$ entre ces paramètres représente une courbe admettant dans le plan λ, μ un point double à distance finie, la surface admettra une troisième génératrice double s'appuyant sur D et D′.

Signalons sans insister l'existence de surfaces ayant deux directrices doubles D et D′ confondues (1).

312. Surfaces quartiques admettant une droite triple. — Une surface quartique admettant une droite triple est de ce fait réglée, car tout plan passant par la droite triple la coupe suivant une autre droite. On peut toujours, en transformant homographiquement, se ramener au cas où la droite triple est la droite à l'infini du plan des xy. La surface sera ainsi le lieu d'une droite

$$xA(z)+yB(z)=C(z),$$

A, B étant des polynomes qui seront en général du troisième degré et C un polynome en général du quatrième.

(1) Gambier, *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. 186, 6 mai 1928, p. 1342-1344.

Un cas particulier intéressant est celui où il existe deux binomes du premier degré $az+p$ et $bz+q$, tels que l'on ait l'identité

$$C(z) \equiv (az+p)A(z) + (bz+q)B(z).$$

La surface contient alors la droite

$$x = az+p, \qquad y = bz+q.$$

On obtient ainsi un conoïde représentant d'une classe de surfaces du quatrième ordre engendrées par des droites s'appuyant sur deux droites fixes D et D', et dont le mode de génération consiste à établir une correspondance (1, 3) entre le point M de D et le point M' de D'.

Mais cette classe n'épuise pas l'ensemble des surfaces quartiques douées d'une droite triple. Revenons aux surfaces représentées par l'équation

$$xA(z) + yB(z) = C(z)$$

qui fait jouer un rôle particulier à la direction du plan xOy. En choisissant l'axe des z de manière qu'il ne coupe la surface en aucun point à distance finie, et en appelant c une constante, l'équation peut s'écrire

$$xA(z) + yB(z) = c.$$

Ce cas est donc moins simple que le précédent.

313. Surfaces quartiques admettant une conique double et une droite double. — Soit Γ la conique double ; comme elle forme la totalité d'une section plane, la droite double Δ est en dehors du plan de Γ et s'appuie sur Γ. Prenons Δ pour axe Oz et le plan de Γ (qu'on peut toujours supposer à distance finie) pour plan xOy ; Ox étant la tangente en O à Γ et Oy le diamètre conjugué correspondant, l'équation de notre surface s'écrira

$$(y^2-2px-qx^2)^2 + z(\alpha x+\beta y)(y^2-2px-qx^2) \\ + z^2(ax^2+2bxy+cy^2) = 0.$$

Tout plan passant par la droite double coupe la surface suivant deux autres droites qui se croisent sur Γ.

314. Impossibilité de l'existence de trois droites doubles disposées d'une manière complètement quelconque. — Nous venons d'obtenir différentes catégories de surfaces réglées du quatrième ordre. Nous n'examinerons pas si l'on a épuisé toutes les éventualités possibles ; montrons seulement l'impossibilité d'une surface quartique ayant trois droites doubles, disposées d'une manière quelconque.

Considérons une surface quartique admettant trois droites doubles deux à deux distinctes. Si deux d'entre elles ne sont pas dans un

même plan, il est nécessaire que la troisième s'appuie sur chacune d'elles. En effet, D et D′ étant des droites doubles non coplanaires, notre surface est le lieu d'une droite s'appuyant sur D et D′. Elle ne pourra s'appuyer sur une droite D″ qui ne rencontrerait ni D ni D′, car dans un tel cas, elle décrirait une quadrique : elle ne saurait s'appuyer davantage sur une droite D″ qui serait coplanaire à D′, mais non à D. Donc si une surface quartique admet deux génératrices doubles non coplanaires, une troisième génératrice double éventuelle sera une droite s'appuyant sur ces deux génératrices (cf. n° 311). Nous allons maintenant passer à des surfaces contenant au plus un nombre fini de droites.

315. Surfaces de Steiner. — Une surface quartique peut avoir trois lignes doubles disposées suivant les arêtes d'un trièdre, dont le sommet est point triple de la surface. Supposons que ces trois droites soient réelles et prenons-les comme axes de coordonnées. En écrivant que tout plan parallèle à une face du trièdre de coordonnées détermine une section munie d'un point double sur l'arête opposée, on trouve aisément l'équation générale de ces surfaces

$$Ay^2z^2 + A'z^2x^2 + A''x^2y^2 + 2Bx^2yz + 2B'y^2zx + 2B''z^2xy + Cxyz = 0$$

(il est bien clair, par exemple, que la présence d'un terme en x^4 ou en x^3y, ou en x^3, ou en x^2y, empêcherait ce point $y = 0$, $z = 0$ d'être un point double pour une section $x = \text{const.}$).

On prouvera facilement, comme exercice, que chaque plan tangent à une telle surface la coupe suivant deux coniques, se coupant sur les axes et au point de contact.

Observons également que l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{A}{x^2} + \frac{A'}{y^2} + \frac{A''}{z^2} + \frac{2B}{yz} + \frac{2B'}{zx} + \frac{2B''}{xy} + \frac{C}{xyz} = 0;$$

en effectuant la transformation $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$, $Z = \frac{1}{z}$, on la ramène donc à une surface cubique possédant quatre points doubles. En posant

$$\frac{1}{y} = \frac{u}{x}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{v}{x},$$

il vient

$$A + A'u^2 + A''v^2 + 2Buv + 2B'v + 2B''u + \frac{C}{x}uv = 0,$$

d'où la représentation suivante de la surface

$$x = \frac{uv}{f(u, v)}, \qquad y = \frac{v}{f(u, v)}, \qquad z = \frac{u}{f(u, v)},$$

f étant un polynome du second degré.

Ces indications générales serviront d'introduction au substantiel exposé donné par M. Michel, au chap. xv de son ouvrage déjà cité, sur la théorie générale des surfaces de Steiner.

316. Surfaces quartiques possédant une conique double indécomposée : cyclides. — On peut toujours se ramener, par une homographie, au cas où cette conique est le cercle imaginaire de l'infini. On obtient ainsi une des surfaces

$$A(x^2+y^2+z^2)^2+(Bx+Cy+Dz)(x^2+y^2+z^2)+\varphi(x,y,z)=0,$$

qu'on comprend dans la dénomination de *cyclides,* laquelle embrasse le cas où A est nul, la surface se réduisant au troisième degré.

On peut développer la théorie des cyclides parallèlement à celle des cycliques planes. On considère une sphère qui reste orthogonale à une sphère fixe et dont le centre demeure sur une quadrique, d'équation tangentielle

$$f(u, v, w, h)=0.$$

Cette sphère dépend donc de deux paramètres. Je laisse au lecteur le soin d'établir par une méthode identique à celle du problème correspondant de géométrie plane, que cette enveloppe est une cyclide.

Inversement, toute cyclide est susceptible, et cela de cinq manières, d'un tel mode de génération. On met ainsi en jeu cinq sphères fixes, deux à deux orthogonales, et cinq quadriques homofocales. C'est ce qu'on vérifiera par un calcul d'identification tout pareil à celui que nous avons indiqué en géométrie plane.

Une surface du quatrième ordre admet en général une infinité de plans bitangents, formant une famille à un paramètre. Un plan bitangent à une surface quartique à conique double donne une section ayant quatre points doubles, à savoir les deux points de rencontre du plan avec la conique double et les deux points de contact. Donc cette quartique se décompose en deux coniques.

Prenons le cas des cyclides ; tout plan est coupé par le cercle de l'infini en ses points cycliques. Il s'ensuit que *tout plan bitangent à une cyclide la coupe suivant deux cercles.*

Le système donnant l'intersection d'une cyclide et d'une sphère se ramène immédiatement, le cercle de l'infini étant écarté, à un système donnant l'intersection d'une sphère et d'une quadrique (résoudre l'équation de la sphère par rapport à $x^2+y^2+z^2$ et porter cette valeur dans l'équation de la cyclide). En coupant une cyclide par une sphère, on obtiendra donc une biquadratique sphérique. Si la sphère est bitangente à la cyclide, la biquadratique aura deux points

doubles et, par suite, se décomposera en deux cercles. *Donc toute sphère bitangente à une cyclide la coupe suivant deux cercles.*

317. On peut remarquer qu'une cyclide possédant un point double est l'inverse d'une surface ordinaire du second degré, et une cyclide ayant deux points doubles, l'inverse d'un cône. Une cyclide de Dupin, inverse d'un cône de révolution, peut avoir quatre points doubles (¹).

Comme application de cette théorie, nous allons étudier ce problème :

Trouver les surfaces dont les normales s'appuient sur deux courbes fixes.

Désignons par C et D ces deux courbes. En un point M quelconque de la surface cherchée, la normale sera une droite rencontrant la courbe C en un point P et la courbe D en un point Q. Nous aurons à nous appuyer sur le lemme suivant :

Toute surface dont les normales sont astreintes à rencontrer une courbe C *peut s'obtenir comme l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre dont le centre décrit la courbe* C.

En effet, l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre est une surface S engendrée par un cercle γ, le long duquel les normales à S vont concourir au centre de la sphère tangente à S suivant ce cercle ; donc toute normale à S rencontre C. Inversement, soit S une surface algébrique dont les normales rencontrent C. A chaque point P de C, il correspond sur S une courbe suivant laquelle toute normale à S rencontre P : cette courbe est une trajectoire orthogonale des génératrices du cône de sommet P l'admettant pour directrice, en appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P et x, y, z celles d'un point M de cette courbe ; on a donc la relation d'orthogonalité

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz = 0,$$

en vertu de laquelle la distance MP reste constante. Donc le lieu des points de S où sa normale passe en P est une courbe tracée sur une sphère de centre P, le long de laquelle il y a contact de S et de la sphère. Donc il est bien établi que la surface proposée peut être regardée comme une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur la courbe.

Revenons maintenant au problème proposé. Une surface dont les normales rencontrent à la fois une courbe C et une courbe D pourra se définir d'une part comme l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre ayant leurs centres sur la courbe C, d'autre part, comme

(¹) Il intervient ici cette circonstance : l'inversion peut modifier l'ordre de multiplicité de certains points.

l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre ayant leurs centres sur la courbe D. Considérons une sphère de la première famille et son cercle de contact : les normales à la surface cherchée aux divers points de ce cercle vont rencontrer la courbe D, les sphères de la seconde famille sont donc complètement déterminées par la condition d'avoir leurs centres sur D et de toucher notre sphère de la première famille, on peut dire encore : *deux sphères de familles différentes sont tangentes entre elles.*

Par suite, pour engendrer l'une de nos familles de sphères, il suffit de considérer trois sphères particulières de l'autre famille ; la première famille sera constituée par les sphères tangentes à ces trois sphères fixes.

Nous avons donc établi la proposition suivante : *s'il existe une surface dont les normales rencontrent à la fois deux courbes* C *et* D, *cette surface sera l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.*

Étudions cette enveloppe : nous allons montrer qu'elle répond à la question. Prenons trois sphères fixes, elles ont en commun, à distance finie, deux points A et B, réels ou imaginaires. Prenons le point A pour pôle d'inversion ; nos sphères fixes se changent en trois plans fixes et on est ramené à chercher l'enveloppe des sphères tangentes à trois plans fixes, ou plus exactement d'un système de telles sphères. Or, pour chaque système, l'enveloppe est manifestement un cône de révolution ayant pour sommet celui du trièdre fixe. Ce cône est à la fois l'enveloppe des sphères inscrites (première famille) et de ses plans tangents (seconde famille). En revenant à la figure initiale, on trouve donc une cyclide, inverse d'un cône de révolution et enveloppe de deux familles de sphères à un paramètre : c'est la CYCLIDE DE DUPIN.

Les sphères S inverses des plans tangents au cône appartiennent au réseau des trois sphères fixes initiales, et ont par suite leurs centres dans un plan ; de chacun de ces centres partent une infinité de normales à la cyclide, la coupant sur le cercle de contact avec la sphère S considérée ; ces normales forment donc un cône de révolution ayant pour directrice la courbe lieu des centres des sphères T. Ces sphères T, orthogonales aux sphères inverses des plans méridiens du cône (formant un faisceau) appartiennent aussi à un réseau. Donc le lieu de leurs centres est une section conique. Il en est de même du lieu des centres des sphères S et ces deux coniques sont disposées de manière que chacune d'elles soit le lieu des sommets des cônes de révolution menés par l'autre.

On est ainsi conduit à étudier ce problème auxiliaire (cf., p. 417) : *Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée.*

Je me contente de le signaler, à titre d'application du théorème de

Dandelin. Si l'on part d'une ellipse, définie comme enveloppe du plan

$$ux + vy + wz + h = 0$$

par l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 = h^2, \tag{1}$$

on trouve l'hyperbole ayant pour équation tangentielle

$$(a^2 - b^2)u^2 - b^2w^2 = h^2. \tag{2}$$

Il y a réciprocité entre ces deux courbes situées dans les plans rectangulaires xOy et xOz, les foyers de l'une d'elles sont sommets de l'autre. En partant d'une parabole, on trouve une seconde parabole égale, d'un plan rectangulaire, le sommet de chacune de ces paraboles étant encore foyer de l'autre.

Deux coniques telles que chacune soit le lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'autre sont dites *focales* l'une de l'autre. Rappelons l'origine de ce terme : dans tout faisceau tangentiel de quadriques, il existe quatre quadriques réduites à des coniques; en particulier, si l'on a des quadriques homofocales, l'une de ces coniques est le cercle de l'infini, les plans des trois autres sont les trois plans de symétrie communs; sur ces trois courbes, il y en a deux seulement qui soient réelles, et on leur applique la dénomination précédente. Cela équivaut à ce qui précède : et en effet, pour passer de l'équation (1) à l'équation (2), il suffit d'en retrancher $b^2(u^2 + v^2 + w^2)$. Donc (1) et (2) représentent des quadriques homofocales dégénérées.

En nous reportant à la génération d'une cyclide quelconque comme enveloppe d'une sphère, nous sommes donc amenés à concevoir ainsi la cyclide de Dupin : une surface susceptible d'être engendrée, et cela de deux manières différentes, comme enveloppe d'une sphère, dont le centre décrit une conique (dégénérescence tangentielle d'une quadrique), cette sphère restant orthogonale à une sphère fixe.

Ainsi que nous l'avons dit, chaque sphère inscrite de l'un des systèmes est tangente à une sphère inscrite de l'autre. Les sphères de chaque système ont en commun deux points fixes, de telle sorte que la cyclide possède quatre points doubles.

Cette propriété est caractéristique de la cyclide de Dupin dans l'ensemble de toutes les cyclides réelles et elle est solidaire de la dégénérescence de deux des quadriques lieux de centres de sphères bitangentes (lesquelles deviennent par là-même sphère inscrite). On obtient une classe moins restreinte en supposant la dégénérescence d'une seule des cinq quadriques. Cette classe comprend les surfaces enveloppes de sphères dont le centre décrit une conique, tandis que ces sphères restent orthogonales à une sphère fixe, et par suite à toutes celles du faisceau contenant cette sphère et le plan de la conique.

Donc les sphères dont la surface est l'enveloppe passent par deux points fixes qui sont des points doubles de la surface. Celle-ci est donc l'inverse d'un cône quelconque du second ordre.

Le tore est un cas particulier de la cyclide de Dupin : le couple correspondant de coniques focales se compose d'un cercle et de son axe. La propriété du tore d'être coupée par un plan bitangent suivant deux cercles (Villarceau) n'est nullement spéciale à cette surface. Nous avons vu qu'elle est commune à toutes les cyclides.

318. Surfaces quartiques possédant deux droites doubles situées dans un même plan. — On peut toujours, par une homographie, se ramener au cas où ces droites sont les droites à l'infini des plans xOz et yOz. L'équation de la surface est alors de la forme

$$Ax^2y^2 + xy(Bx + Cy + Dz) + \varphi(x, y, z) = 0,$$

φ étant un polynome quelconque du second degré. On peut engendrer la surface par ses sections coniques contenues dans les plans passant par chaque droite double, ou encore par ses sections coniques déterminées par les plans bitangents.

Nous nous contenterons d'indiquer un problème simple conduisant à des surfaces de ce genre.

Trouver le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constante.

Soient les deux droites fixes

$$\left\{\begin{aligned} x\sin\alpha - y\cos\alpha &= 0,\\ z - h &= 0;\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x\sin\alpha + y\cos\alpha &= 0,\\ z + h &= 0.\end{aligned}\right.$$

Désignons par u, v les distances d'un point M à ces deux droites Nous aurons

$$u^2 = (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (z - h)^2,$$
$$v^2 = (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + (z + h)^2;$$

ces équations étant indifférentes au changement de u en $-u$, v en $-v$, il nous suffira d'écrire

$$u + v = 2a$$

et d'éliminer u et v. On déduit des deux premières équations par soustraction

$$a(v - u) = 2xy\sin\alpha\cos\alpha + 2hz;$$

on a donc

$$u = a - \frac{xy}{a}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{hz}{a},$$

$$v = a + \frac{xy}{a}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{hz}{a};$$

en portant dans

$$u^2 + v^2 = 2(x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + z^2 + h^2),$$

nous trouvons finalement la surface

$$\frac{x^2y^2}{a^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{2hxyz}{a^2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{h^2z^2}{a^2} + a^2$$
$$= (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + z^2 + h^2),$$

qui appartient bien au type indiqué. Dans le cas où h est nul, c'est-à-dire où les deux droites sont dans un même plan, l'équation précédente devient

$$\frac{x^2y^2}{a^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^2 = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + z^2;$$

le plan $z = 0$ la coupe suivant quatre droites

$$(x^2 \sin^2 \alpha - a^2)(y^2 \cos^2 \alpha - a^2) = 0,$$

dont les quatre points de rencontre à distance finie (qui sont les sommets d'un rectangle) sont points doubles de la surface (cf. p. 487).

IX. — Récapitulation de la théorie des courbes et des surfaces à l'aide des notations vectorielles.

319. La dérivation géométrique. — Pour passer en revue les propriétés des courbes de l'espace et celles des surfaces, nous utiliserons la notion de *dérivée géométrique*.

Si les composantes d'un vecteur $\mathbf{V}$ sont des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ d'un paramètre t, nous appellerons DÉRIVÉE GÉOMÉTRIQUE de $\mathbf{V}$ PAR RAPPORT A t et nous désignerons par $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ le vecteur qui a pour composantes les dérivées $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ des composantes de $\mathbf{V}$.

Le processus par lequel on passe de $\mathbf{V}$ *à* $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ *est indépendant des axes,* car les trois égalités ordinaires

$$f'(t) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \qquad g'(t) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t},$$
$$h'(t) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

équivalent à l'égalité géométrique

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta t},$$

dont le second membre a un sens indépendant des axes choisis.

Soit, en particulier, la courbe représentée paramétriquement par les équations

(1) $$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Soit $M(x, y, z)$ le point provenant de la valeur t; soit $M'(x', y', z')$ le point provenant de la valeur $t + \Delta t$. La dérivée géométrique de **OM** par rapport à t sera le vecteur de composantes $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$; elle sera en même temps la limite de

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{OM}' - \mathbf{OM}) = \frac{\mathbf{MM}'}{\Delta t},$$

ce qui montre bien, une fois de plus, le caractère intrinsèque de l'opération effectuée. On peut même noter que *cette opération est indépendante de l'origine* O *choisie* : quel que soit le point fixe A, la dérivée géométrique de **AM** est le vecteur de composantes $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$. Il est donc permis, au lieu de $\frac{d}{dt}(\mathbf{OM})$ ou $\frac{d}{dt}(\mathbf{AM})$, d'écrire plus simplement $\frac{dM}{dt}$.

Si, dans les équations (1), le paramètre t désigne le temps, $\frac{\mathbf{MM}'}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne de M sur la courbe, pendant l'intervalle $(t, t + \Delta t)$; sa limite $\frac{dM}{dt}$ est alors la *vitesse à l'instant t*. Pareillement, la dérivée géométrique $\frac{d^2M}{dt^2}$ de $\frac{dM}{dt}$, c'est-à-dire le vecteur de composantes $f''(t)$, $g''(t)$, $h''(t)$, est l'*accélération à l'instant t*. On définirait de même

$$\frac{d^3M}{dt^3}, \quad \frac{d^4M}{dt^4}, \ldots$$

320. Analogies du calcul des dérivées géométriques avec celui des dérivées ordinaires. — Appelons **U** et **V** des vecteurs dont les composantes (U_x, U_y, U_z) et (V_x, V_y, V_z) sont des fonctions dérivables de t; soient en outre λ et μ des fonctions dérivables de t. Si l'on écrit les composantes du vecteur

$$\lambda\mathbf{U} + \mu\mathbf{V}$$

et si on les dérive par rapport à t, on obtient des expressions qui sont les composantes du vecteur

$$\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{U} + \frac{d\mu}{dt}\mathbf{V} + \lambda\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mu\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

On peut donc écrire

(2) $$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{U} + \mu\mathbf{V}) = \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{U} + \frac{d\mu}{dt}\mathbf{V} + \lambda\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mu\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

On trouve pareillement

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \wedge \mathbf{V} + \mathbf{U} \wedge \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

L'intérêt de ces résultats est la conservation des lois formelles du calcul ordinaire des dérivées; dans les formules (2) et (3), les premiers membres expriment des dérivées géométriques, et le symbole d'égalité exprime une communauté de grandeur géométrique.

Un problème différent consiste à calculer la dérivée (ordinaire) du produit scalaire **U . V**, c'est-à-dire, en introduisant les composantes de ces vecteurs, à calculer la dérivée de

$$U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z.$$

Le résultat de ce calcul facile peut facilement s'écrire

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{V}.$$

Nous avons ici une égalité ordinaire (au second membre de laquelle interviennent deux dérivées géométriques), mais il y a encore conservation du mécanisme de la dérivation d'un produit. Dans chaque terme du second membre, l'ordre des facteurs est indifférent, tandis que, dans la relation (3), il faut se garder d'altérer cet ordre.

321. Différences avec les dérivées ordinaires. — Étant donnée une fonction $f(t)$, on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$(5)\qquad f(t+\Delta t) - f(t) = \Delta t f'(t+\theta\Delta t), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Mais, si l'on considère un vecteur **V** dont les composantes sont fonctions de t, ON N'A PAS LE DROIT D'ÉCRIRE

$$(6)\qquad \mathbf{V}(t+\Delta t) - \mathbf{V}(t) = \Delta t \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t+\theta\Delta t).$$

L'impossibilité de trouver un nombre θ tel que cette relation ait lieu tient à ce que, en écrivant la relation (5), dans le même intervalle $(t, t+\Delta t)$ pour deux autres fonctions $g(t)$ et $h(t)$, on verra apparaître deux nombres θ_1 et θ_2 qui différeront en général de θ dans (5).

Mais *voici une interprétation remarquable de cette impossibilité*. Soit M l'extrémité d'un vecteur d'origine O et de grandeur géométrique $\mathbf{V}(t)$. L'égalité (6) pourrait encore s'écrire

$$(6')\qquad \mathbf{MM'} = \Delta t \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t+\theta\Delta t)$$

et *elle signifierait qu'il existe sur l'arc* MM' *un point* (de paramètre $(t+\theta\Delta t)$ *où la tangente est parallèle à la corde*. Nous pouvons donc

affirmer qu'un tel point ne saurait exister, du moins en général. D'ailleurs la détermination d'un point sur un arc de courbe est un problème à une inconnue, tandis que le parallélisme de deux directions exige deux équations de condition.

C'est pourquoi nous avons tenu dans ce cours à n'initier l'élève à l'usage des notations vectorielles en théorie des courbes qu'après coup.

Dans la théorie du plan osculateur (nº 61), s'il est loisible de condenser en une égalité vectorielle les relations (3′) du haut de la page 129, ce qui donne

$$\mathbf{M_0M} = (t - t_0)\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2}\mathbf{W},$$

il faut se garder de dire : $\mathbf{W}$ est la dérivée géométrique seconde de $\mathbf{OM}$ pour quelque valeur de t, intermédiaire entre t_0 et t ; en réalité, les composantes de $\mathbf{W}$ sont $f''(t_1)$, $g''(t_2)$, $h''(t_3)$, chacune des valeurs t_1, t_2, t_3 appartenant à l'intervalle (t_0, t) ; mais ces valeurs sont distinctes en général.

322. Une extension permise de la formule de Taylor. — Les difficultés que nous venons de signaler s'opposent à l'*extension pure et simple des développements de Taylor limités* du calcul ordinaire. Elles disparaissent lorsque les trois composantes $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ de $\mathbf{OM}$ sont développables en série : il est clair qu'on peut alors réunir les trois développements

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + \cdots,$$

$$g(t) = g(t_0) + (t-t_0)g'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}g^{(n)}(t_0) + \cdots,$$

$$h(t) = h(t_0) + (t-t_0)h'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}h^{(n)}(t_0) + \cdots$$

en un seul

$$\mathbf{M_0M} = (t-t_0)\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0 + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left(\frac{d^n\mathrm{M}}{dt^n}\right)_0 + \cdots$$

A partir du second terme de cette relation, mettons $\frac{(t-t_0)^2}{2}$ en facteur.

Dans la parenthèse figurera un vecteur de la forme

$$\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\right)_0 + \varepsilon,$$

les composantes de ε tendant vers zéro en même temps que $t - t_0$.

Ainsi, dans le cas où les composantes de $\mathbf{OM}$ sont développables

suivant les puissances de $t - t_0$, il nous est permis d'écrire

$$(7) \qquad \mathbf{M_0M} = (t - t_0)\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2}\left[\left(\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}\right)_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right],$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ étant un vecteur infiniment petit en même temps que $t - t_0$.

323. Applications aux courbes gauches[1]. — La tangente en un point sera fournie par la dérivée géométrique $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ du vecteur **OM**. Le plan osculateur sera le plan des vecteurs $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ et $\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}$.

Ces énoncés appellent des restrictions. Par exemple, le premier devient inopérant lorsqu'au point M considéré, la dérivée géométrique $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ s'annule. Mais, dans ce cas, nous avons appris à lever l'indétermination; les résultats des nos 51 et 60 peuvent s'énoncer en disant : *la tangente est toujours fournie par le premier des vecteurs de la suite des dérivées géométriques qui ne s'annule pas au point considéré.*

En associant à ce vecteur le premier de ceux qui viennent après lui dans la suite, sans s'annuler et sans lui être colinéaire, on détermine de même (nous l'admettrons pour ne pas allonger cet exposé) le plan osculateur.

Un cas important est celui où l'on prend pour paramètre t l'abscisse curviligne s du point M sur la courbe. Les formules (1) du no 150 donnent alors les composantes α, β, γ du vecteur unitaire **T** de la tangente, dans le sens des arcs croissants. On peut les condenser dans l'égalité géométrique

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds}.$$

On a

$$\mathrm{T}^2 = 1,$$

donc la dérivée par rapport à s du produit scalaire de **T** par **T** est nulle.

On a donc, d'après la formule (4),

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathrm{T}}{ds} = 0.$$

Donc $\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{d\mathrm{T}}{ds}$ est un vecteur normal à la courbe au point M, et

[1] Nous supposerons essentiellement qu'il s'agit de courbes telles que les composantes de **OM** soient développables, au voisinage de chaque point, suivant les puissances de $t - t_0$.

comme il est dans le plan osculateur, il est porté par la normale principale(1).

Appelons **N** le vecteur unitaire de la normale principale DANS LE SENS DE LA CONCAVITÉ, ce que nous reconnaîtrons par le fait *qu'une corde joignant le point considéré de la courbe à quelque point suffisamment voisin fait avec la portion de la normale principale qui porte* **N** *un angle aigu.*

Ecrivons que l'on a

$$(8) \qquad \mathbf{M_0M} = (s - s_0)\left(\frac{d\mathrm{M}}{ds}\right)_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2}\left[\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right]$$

et supposons qu'au point M_0, la dérivée géométrique $\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0$ ne soit pas nulle : il est entendu que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un vecteur infiniment petit avec $\mathbf{M_0M}$.

Faisons le produit scalaire des deux membres de (8) par $\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0$. Il viendra, en tenant compte de l'orthogonalité de ce vecteur et de $\left(\frac{d\mathrm{M}}{ds}\right)_0$:

$$(9) \qquad \mathbf{M_0M} \cdot \left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0 = \frac{(s-s_0)^2}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0 \cdot \left[\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\right].$$

Au second membre figure le produit scalaire d'un vecteur fixe, non nul, par un vecteur infiniment voisin : ce produit scalaire est nécessairement positif. Donc le premier membre de (9) est aussi positif, et, par suite, les vecteurs $\mathbf{M_0M}$ et $\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0$ font un angle aigu. Donc $\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\right)_0$ est non seulement porté, comme nous l'avions reconnu, par la normale principale, mais encore, *il est orienté vers la concavité de la courbe.*

Nous retrouvons ainsi, dans une voie plus synthétique, les résultats du n° 151, et il nous est maintenant permis d'écrire

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho\mathbf{N},$$

ρ étant un scalaire positif : pour interpréter ρ, il nous suffit de songer à la vitesse d'un mobile sur une courbe auxiliaire obtenue en considérant un vecteur $\mathrm{O}\mu = \mathbf{T}$, le rôle du temps étant joué par l'arc s de la courbe donnée. Nous retombons sur l'indicatrice sphérique, et ρ la valeur absolue de la vitesse du point μ sur cette courbe; un arc d'in-

(1) $\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}$ est l'accélération d'un mobile décrivant la courbe d'un mouvement uniforme de vitesse égale à 1.

dicatrice étant un infiniment petit équivalent à l'angle des tangentes aux points s et $s+ds$ de la courbe donnée, ρ sera encore la valeur limite du rapport de l'angle de contingence à l'arc ds, c'est-à-dire la courbure. Finalement, la formule précédente

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho\mathbf{N}$$

équivaut aux formules (2) du n° 153 (formules de Frenet).

324. Surfaces réglées, surfaces développables. — Considérons d'abord la représentation paramétrique

$$x = f(\lambda, \mu), \qquad y = g(\lambda, \mu), \qquad z = h(\lambda, \mu)$$

d'une surface quelconque. Soit M_0 le point de la surface fourni par les valeurs λ_0, μ_0 des paramètres, et supposons toujours que f, g, h sont développables suivant les puissances des deux variables $\lambda - \lambda_0$, $\mu - \mu_0$.

Si, laissant fixe et égale à μ_0 la valeur du paramètre μ, on fait varier λ, le point M décrira sur la surface une courbe passant par M_0 : c'est ce qu'on appelle la courbe $\mu = \mu_0$. On définit pareillement la courbe $\lambda = \lambda_0$. En chaque point $M(\lambda, \mu)$ de la surface, il passe ainsi une courbe $\lambda =$ const. et une courbe $\mu =$ const. Et ces courbes forment un réseau recouvrant la surface.

Cela posé, le plan tangent à la surface en un point M_0 sera déterminé par les deux vecteurs $\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)_0$: en effet, la première de ces dérivées géométriques nous donne la tangente à la courbe $\mu = \mu_0$ au point M_0, et la seconde la tangente à la courbe $\lambda = \lambda_0$.

Déterminons par cette méthode le plan tangent à une surface réglée. Nous engendrerons cette surface en nous donnant une courbe C et menant en chaque point M de cette courbe un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ qui sera celui de la génératrice de M. En appelant P un point quelconque de cette génératrice, tel que le segment $\overline{MP}$ (rapporté à cette génératrice orientée conformément au choix précédent du vecteur unitaire), ait pour valeur algébrique μ, nous aurons

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mu\boldsymbol{u}.$$

Les composantes de **OM** d'une part et de $\boldsymbol{u}$ d'autre part sont des fonctions données d'un paramètre λ. Donc celles de **OP** sont des fonctions de μ et de λ. Le plan tangent est alors le plan des vecteurs

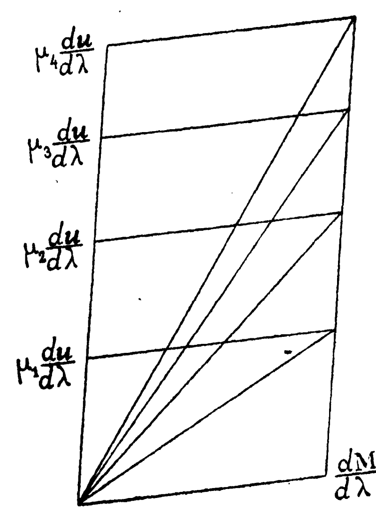
$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial \mu}.$$

Or nous avons
$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{dM}{d\lambda} + \mu \frac{du}{d\lambda},$$
$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = u.$$

Le plan tangent sera donc celui qui contient la génératrice et le vecteur $\frac{dM}{d\lambda} + \mu \frac{du}{d\lambda}$. Le rapport anharmonique de quatre valeurs μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 de μ sera égal à celui des directions des vecteurs

$$\frac{dM}{d\lambda} + \mu_1 \frac{du}{d\lambda}, \quad \frac{dM}{d\lambda} + \mu_2 \frac{du}{d\lambda}, \quad \frac{dM}{d\lambda} + \mu_3 \frac{du}{d\lambda}, \quad \frac{dM}{d\lambda} + \mu_4 \frac{du}{d\lambda},$$

comme il est aisé de le vérifier par une démonstration faite dans le plan contenant $\frac{dM}{d\lambda}$ et $\frac{du}{d\lambda}$.



Cela posé, il y a lieu de distinguer deux cas :

1° Les vecteurs u, $\frac{du}{d\lambda}$, $\frac{dM}{d\lambda}$ ne sont pas dans un même plan. Dans ce cas, en des points distincts d'une génératrice, nous aurons des plans tangents distincts ; le rapport anharmonique de quatre plans tangents sera celui des quatre points de contact.

Nous avions obtenu ce résultat au n° 136, en prenant pour courbe C la trace $x = p(\lambda)$, $y = q(\lambda)$ de la surface sur le plan xOy.

Complétons cela en notant que, μ devenant infini, le plan tangent tend à devenir parallèle au plan de u et de $\frac{du}{d\lambda}$, qui est le plan tangent à la surface lieu de Q, tel que

$$\mathbf{OQ} = \mu u,$$

c'est-à-dire au cône directeur de notre surface.

Ainsi, *le plan tangent au point à l'infini de la génératrice est parallèle au plan tangent au cône directeur.*

On appelle *point central* d'une génératrice celui où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini : la valeur de μ fournissant le point central est donc celle qui assure l'orthogonalité des vecteurs

$$\frac{du}{d\lambda} \wedge u \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dM}{d\lambda} + \mu \frac{du}{d\lambda}\right) \wedge u.$$

Or $\boldsymbol{u}$, $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda}$ et $\boldsymbol{u} \wedge \dfrac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda}$ forment un trièdre trirectangle. Il en résulte facilement que l'orthogonalité des vecteurs précédents équivaut à celle des vecteurs

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} + \mu \frac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda}.$$

Le lieu du point central ou *ligne de striction* est donc défini par la relation

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda} \cdot \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} + \mu \frac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda}\right) = 0.$$

On montrera, comme exercice, que, le cône directeur étant réduit à un plan, la ligne de striction se projette orthogonalement sur ce plan suivant le contour apparent horizontal de la surface (prendre ce plan pour plan xOy, partir de ce contour apparent projeté, soit $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ et supposer que λ soit l'abscisse curviligne de cette courbe, de manière que $\boldsymbol{u}$ ait pour composantes $\dfrac{dx}{d\lambda}$, $\dfrac{dy}{d\lambda}$, 0).

2° Les vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda}$, $\dfrac{d\mathbf{M}}{d\lambda}$ sont situés dans un même plan Π. Alors, en tout point de la génératrice considérée, le plan tangent est le plan Π. Nous allons montrer que *cette circonstance se produit toujours quand la surface est engendrée par les tangentes à une courbe gauche.* Supposons que λ soit l'abscisse curviligne d'un point de cette courbe. Nous aurons alors

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} = \boldsymbol{u},$$

de sorte que deux de nos vecteurs se confondent. Notre énoncé est donc justifié, et *le plan tangent*, le long de toute la génératrice considérée, est celui qui contient en outre le vecteur

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\lambda} = \frac{d^2\mathbf{M}}{d\lambda^2},$$

c'est-à-dire *le plan osculateur*. C'est ce que nous avions déjà établi au n° 136.

325. Courbure des lignes tracées sur une surface. — Pour terminer ces applications de la dérivation géométrique, considérons une surface, soumise aux hypothèses du chapitre XIII. Désignons par $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire de la normale à cette surface. Soit C une courbe tracée sur la surface, et à laquelle on puisse appliquer les théories générales qui précèdent. Considérons en un point M de C le vecteur unitaire $\mathbf{T}$ de la tangente et le vecteur unitaire $\mathbf{N}$ de la normale principale dans le sens de la concavité.

Posons, comme au n° 226,

$$|(\widehat{n, \mathrm{N}})| = \theta, \qquad \text{d'où} \qquad n \, . \, \mathbf{N} = \cos\theta.$$

Nous avons, en tout point de C,

$$\mathbf{T} . n = 0,$$

et par suite

$$\mathbf{T} \cdot \frac{dn}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot n = 0.$$

C'est cette relation que nous avons exprimée au n° 226. Le second terme du premier membre est ici

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}.$$

Le premier terme $\mathbf{T} . \dfrac{dn}{ds}$ jouit, comme il apparaît *à priori*, de cette propriété : *il a la même valeur pour toutes les courbes de la surface qui sont tangentes à* C *en* M : c'est ce qu'on vérifiera en remarquant que les composantes de $\dfrac{dn}{ds}$ se calculent au moyen du théorème des fonctions composées, lequel intervient ici par le fait que C ou toute autre courbe de la surface est analytiquement définie en posant

$$\lambda = \lambda(s), \qquad \mu = \mu(s),$$

λ, μ étant toujours les paramètres qui fixent la position du point sur la surface.

On retrouve ainsi le résultat essentiel des n°s 225 et 227 : *communauté de valeur du rapport* $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$ *à toutes les courbes de la surface ayant, au point* M, *la même tangente.*

On rattache ainsi le théorème de Meusnier (n° 227) à sa véritable origine. On peut systématiser et obtenir d'autres propositions importantes. Nous renverrons pour ces extensions le lecteur à l'*Initiation aux Méthodes vectorielles.*

CONSEILS CONCERNANT LES PROBLÈMES

Pour beaucoup d'élèves, l'épreuve de géométrie analytique se réduit à une application simpliste des théories générales. Montrer qu'ils les connaissent *en gros* est leur unique souci. Incapables de mettre à profit les circonstances particulières qui se présentent, et de simplifier à leur faveur les calculs, ils parviennent rarement à des conclusions nettes, à des résultats bien dégagés. Ils tendent à oublier qu'une méthode n'est qu'un moyen, que le résultat est le véritable but.

Persuader le débutant qu'il n'a rien fait (que noircir du papier...) tant qu'il n'a obtenu *la réponse,* sous forme précise, me semble d'importance essentielle. En possession de celle-ci, le contrôle devient possible, et parfois il achemine à l'interprétation géométrique.

Il n'est pas de meilleur exercice que celui qui consiste, parvenu à ce stade, à reprendre entièrement la composition ; à la lumière des résultats géométriques obtenus, l'exposé de la solution analytique se simplifie en général notablement. On éprouve une réelle satisfaction à partir du moment où les équations employées sont le reflet fidèle des idées à associer en vue d'une étude purement géométrique du sujet.

A l'appui de ces idées, maintes fois développées, nous allons présenter la solution du problème de Mathématiques spéciales proposé aux candidats à l'École Normale supérieure en 1928 : notre rédaction ne dispensera nullement le lecteur de faire les calculs tels qu'ils se présenteraient à lui s'il entreprenait pour la première fois le problème. Ces calculs effectués, il comprendra mieux ce qui reste à faire pour achever vraiment la solution.

I. *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Une conique à centre varie, son plan restant parallèle au plan* yOz, *son centre décrivant l'axe des* x ; *un axe de cette conique reste parallèle à* Oy *et ses extrémités décrivent les droites*

$$y - 1 = z = 0 \qquad et \qquad y + 1 = z = 0.$$

Déterminer la surface S, *lieu de cette conique, de manière que* S *admette pour plan de symétrie le plan* $y = x$. *Montrer qu'il existe deux types de surfaces* S *répondant à la définition précédente, et non réductibles l'un à l'autre, dans le champ réel, par déformation continue. Indiquer leurs aspects généraux.*

II. *Énumérer les droites, à distance finie, ou à l'infini, entièrement situées sur* S. *Mener par un point donné les droites ne rencontrant* S *qu'en un seul point à distance finie ; discuter. Trouver le lieu des droites qui n'ont avec* S *aucun point commun à distance finie.*

III. *Soient* U *une section de* S *par un plan* $x = u$, V *une section de* S *par un plan* $y = v$. *Connaissant* u *et* v, *déterminer par un tracé plan les sommets des cônes contenant à la fois* U *et* V. *Trouver le lieu de ces sommets quand* u *et* v *varient indépendamment. Comment faut-il lier* u *et* v *pour obtenir un sommet qui demeure fixe ? Dans ce cas, quel est sur* S *le lieu des points communs à* U *et à* V ? *Récapituler les familles de coniques dont la présence a été reconnue sur* S.

IV. *Fixer la valeur du paramètre qui reste indéterminé dans l'équation de* S *de manière qu'en chaque point double de* S *situé à distance finie, le cône des tangentes soit de révolution. Montrer que des deux surfaces particulières ainsi obtenues l'une* S_1 *peut se définir comme le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites du plan* xOy *est constante.*

V. *Soit* S_k *l'homothétique de* S_1 *dans le rapport* k, *le centre d'homothétie étant à l'origine. Lorsque* k *prend toutes les valeurs positives, les surfaces* S_k *forment une famille à un paramètre. Démontrer que, par un point* M *quelconque, il passe deux surfaces* S_k. *Comment se projette leur intersection sur l'un des*

plans $y = \pm x$? Prouver que, le long des courbes dont est composée cette intersection, les deux surfaces se coupent orthogonalement.

VI. *Prouver qu'il existe un champ de forces, de composantes définies par*

$$X = f(x, y), \qquad Y = f(y, x), \qquad Z = \varphi(z),$$

dont les lignes de force sont les intersections des surfaces S_k, associées deux à deux de toutes les manières possibles. Montrer que ce champ admet une fonction de forces et trouver les surfaces de niveau Σ correspondantes.

VII. *Étudier l'intersection d'une surface Σ et d'une S_k; déterminer la surface de révolution que cette intersection engendre en tournant autour de Oz; le long d'un arc de cette intersection, trouver la surface algébrique de degré minimum admettant les mêmes plans tangents que S_k.*

I. — La surface S nous est donnée comme le lieu géométrique d'une conique

$$x = \lambda, \qquad y^2 + \frac{z^2}{\varphi(\lambda)} = 1.$$

Mais, contrairement à ce qui se passe dans les problèmes usuels de lieux géométriques, la fonction $\varphi(\lambda)$ ne s'obtient pas directement : elle résulte, *a posteriori*, de ce que S doit admettre le plan de symétrie $y = x$. Or, l'équation de S est

$$z^2 = \varphi(x)(1 - y^2).$$

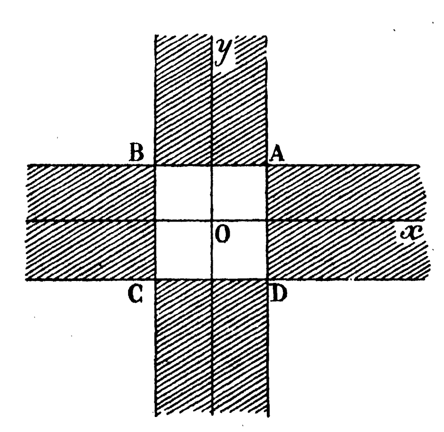
Le second membre ne peut être symétrique en x et y que si $\varphi(x)$ est le produit de $1 - x^2$ par un facteur constant. L'équation générale des surfaces S peut donc s'écrire

$$(1) \qquad mz^2 = (1 - x^2)(1 - y^2).$$

Si m est < 0, les points réels de la surface se projettent dans les régions définies par l'inégalité

$$(1 - x^2)(1 - y^2) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire dans les régions hachurées de la figure ci-contre. Si m est > 0, les points réels de la surface se projettent dans les régions blanches.



Nous avons donc deux aspects bien distincts de nos surfaces, au point de vue de la géométrie réelle, suivant le signe de m.

L'élève qui a bien lu son texte sait que (IVe partie) pour une valeur convenable de m on aura une surface S lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes Δ et Δ' du plan xOy est constante. Or, dans le plan xOy, un tel lieu se compose de quatre droites, formant les côtés d'un rectangle ayant pour diagonales Δ et Δ'. Les deux droites fixes Δ et Δ' sont donc ici les diagonales du carré ABCD. Le point O étant alors projection de deux points réels de la surface, celle-ci correspondra à une valeur positive de m. Les autres surfaces du même type s'en déduisent en

multipliant les cotes par un facteur constant : chacune d'elles affectera la forme d'un *coussin* prolongé, en chacun de ses coins A, B, C, D par une nappe infinie, qui rappelle une nappe de cône du second degré, par les caractères suivants :

Existence d'un point conique A où le cône des tangentes est du second degré ;

Existence, pour la nappe en question, de deux plans de symétrie rectangulaires, $z = 0$, $y = x$ (par exemple).

Mais la nappe diffère d'une nappe de cône : si sa section par le plan $z = 0$ est bien formée de deux demi-droites, sa section par le plan $y = x$ est formée de deux branches de paraboles (d'axe Oz), ce qui montre bien l'allure générale de la nappe étudiée (qui est notamment à l'extérieur de la nappe correspondante du cône des tangentes).

Si, dans l'équation (1), on donne à m une valeur négative, on aura une surface comprenant quatre nappes infinies, chacune d'elles se soudant aux deux autres, comme le fait comprendre suffisamment la figure du début.

Il est bien clair que ce cas (où nous avons notamment quatre nappes et non cinq) ne peut se ramener au premier par une déformation continue.

II. — Les sections U de la surface par des plans $x = u$ étant des coniques, la droite de l'infini du plan yOz est une droite double de S. De même, en vertu de la symétrie de S par rapport au plan $y = x$, la droite de l'infini du plan xOz est aussi une droite double de S. Ces deux droites doubles δ et δ' forment la totalité de la section de S par le plan de l'infini.

Une génératrice rectiligne à distance finie de S aura nécessairement son point à l'infini sur δ ou sur δ'. Elle sera donc parallèle au plan xOz ou au plan yOz, ce qui nous dispense, dans la recherche des génératrices, de prendre la droite sous sa forme analytique générale.

Un plan $x = u$ coupe S à distance finie suivant une conique U, qui ne se décompose que pour $u = \pm 1$. Résultats analogues pour les plans $y = v$.

Finalement, il n'y a sur la surface que quatre droites à distance finie, à savoir les quatre côtés du carré ABCD.

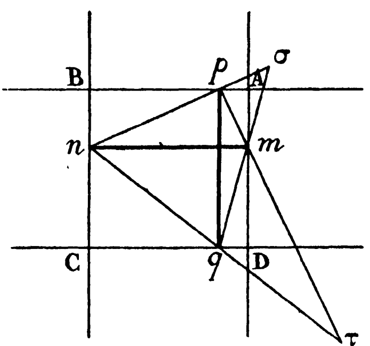
Cherchons maintenant la condition *pour qu'une droite ne coupe* S *qu'en un seul point à distance finie.* Son point à l'infini devant encore se trouver sur δ ou sur δ', la sécante considérée sera parallèle à yOz ou à xOz. Dans le premier cas, elle sera, dans un plan $x = u$, une direction asymptotique de la conique U section de S par ce plan. Pareillement, dans un plan $y = v$, qui détermine une conique V, toute direction asymptotique de celle-ci répondra à la question. Finalement, pour mener par un point donné P les droites ne coupant S qu'en un seul point à distance finie, on mène par P les plans parallèles à xOz et à yOz et, dans chacun d'eux, les parallèles aux asymptotes des coniques V et U qu'ils déterminent. Chaque couple ainsi obtenu est formé de droites réelles toutes les fois que la conique correspondante est une hyperbole (point facile à développer).

Les droites qui ne rencontrent la surface en aucun point à distance finie sont, ou bien les asymptotes des coniques U et V, ou bien encore les horizontales des plans $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ (Oz étant regardée comme verticale) qui sont (deux fois) directions asymptotiques d'une conique U ou V dégénérée en une droite double. Le lieu des premières se compose des deux conoïdes

$$mz^2 + (1 - x^2)y^2 = 0,$$
$$mz^2 + (1 - y^2)x^2 = 0.$$

III. — La symétrie de la surface par rapport au plan xOy rend immédiat le tracé plan fournissant les sommets σ et τ des deux cônes contenant à la fois U et V.

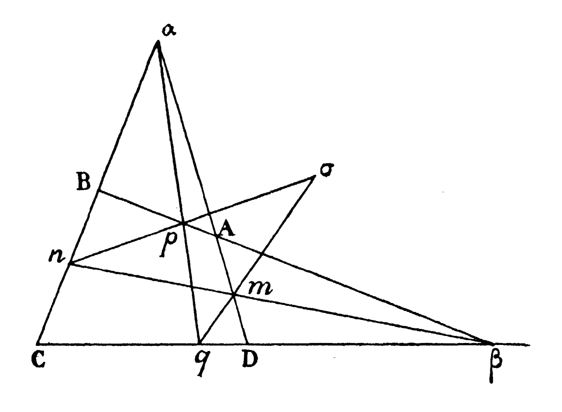
Puisque les coordonnées de σ et de τ dépendent à la fois des deux paramètres u et v, il semble *a priori* qu'il n'y ait pas de *lieu* de ces points.



En fait, si l'on écrit les équations des deux droites np et mq qui déterminent par leur intersection le point σ, on trouve, en les résolvant,

$$x = y = \frac{uv + 1}{u + v}.$$

Le lieu de σ est donc la première bissectrice : géométriquement, on peut le retrouver ainsi : soit le quadrilatère ABCD, dont les côtés opposés se coupent respectivement en α, β. Menons αpq, βmn et soit σ le point de rencontre de np et mq. Fixons m et n. Alors p et q se correspondent homographiquement sur les droites de base AB et CD. Donc mq et np décrivent des faisceaux homographiques, ayant un rayon homologue βmn commun : donc σ décrit une droite. Lorsque p est en B, q est en C ; donc C fait partie du lieu ; lorsque p est en A, q est en D ; donc A fait partie du lieu. Le lieu est donc la droite AC, indépendamment de la position de m sur AD.



On retrouve bien ainsi, dans le cas particulier qui nous intéresse, le résultat annoncé. Pareillement, le lieu du point τ est la droite BD.

Si σ reste fixe sur la droite AC, nous aurons entre l'abscisse u de la section U et l'ordonnée v de la section V la relation

$$uv + 1 = \lambda (u + v),$$

λ étant l'abscisse de σ. Donc le lieu des points de rencontre de U et de V, accouplées de manière que σ soit fixe, est défini par les deux équations

$$mz^2 = (1 - x^2)(1 - y^2),$$
$$xy + 1 = \lambda (x + y) ;$$

de la dernière on tire

$$(1 - x)(1 - y) = (\lambda - 1)(x + y),$$
$$(1 + x)(1 + y) = (\lambda + 1)(x + y),$$

d'où, en portant dans la première,

$$mz^2 = (\lambda^2 - 1)(x + y)^2,$$

ce qui montre que le lieu est formé de deux hyperboles contenues dans des

plans passant par la droite

$$z = x + y = 0.$$

Pareillement, lorsque τ reste fixe, on trouve que le lieu des points de rencontre de U et de V est formé de deux hyperboles, projetées horizontalement suivant

$$xy - 1 = \mu(x - y)$$

et contenues dans des plans passant par la droite

$$z = x - y = 0.$$

Nous trouvons donc finalement quatre familles de coniques réelles sur S. *A priori*, il était clair qu'un plan mené par AC ou BD déterminait dans S une section ayant deux points doubles (A et C par exemple) à distance finie et deux à l'infini, aucun de ces deux derniers n'étant aligné avec les précédents. Il est donc manifeste qu'une telle section se décompose en deux coniques.

IV. — Transportons l'origine au point double $x = y = 1$, $z = 0$. L'équation de S devient

$$mZ^2 = (X^2 - 2X)(Y^2 - 2Y).$$

Le cône des tangentes s'écrit

$$mZ^2 - 4XY = 0,$$

ou encore

$$\frac{m}{2}Z^2 + \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.$$

Les formes linéaires entre parenthèses sont des formes normales, c'est-à-dire représentent la distance algébrique d'un point à un plan qui est ici un bissecteur du dièdre xOz, yOz. On en déduit très aisément que le cône proposé ne sera de révolution que si l'on a

$$m = \pm 2.$$

En prenant $m = +2$, nous aurons une *surface coussin*

$$(S_1) \qquad 2z^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1),$$

dont l'équation résulte de l'élimination de ρ, ρ' entre les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\rho^2 &= (x-y)^2 + 2z^2, \\ 2\rho'^2 &= (x+y)^2 + 2z^2, \\ \rho + \rho' &= \sqrt{2}. \end{aligned} \right.$$

On peut donc la considérer comme le lieu des points dont la somme ou la différence des distances aux deux bissectrices de l'angle xOy est constante et égale à $\sqrt{2}$ (cf. n° 318).

V. — Le lieu des points dont la somme ou la différence des distances aux deux bissectrices de xOy est constante et égale à $k\sqrt{2}$ sera de même la surface

$$(S_k) \qquad 2k^2z^2 = (x^2 - k^2)(y^2 - k^2).$$

Si l'on se donne x, y, z, cette équation du second degré en k^2 a toujours ses racines réelles. Donc, par un point donné, il passe deux surfaces S_k, dont l'une porte le point sur son coussin, et l'autre sur une de ses nappes infinies.

Au point (x, y, z), la normale à l'une de ces surfaces S_k aura pour para-

mètres directeurs

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\rho'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\rho'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\rho'}{\partial z},$$

ρ et ρ' étant définis par les deux premières équations (2); la normale à la seconde aura pour paramètres directeurs

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\rho'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial\rho'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial z}-\frac{\partial\rho'}{\partial z}.$$

Ces deux normales sont rectangulaires, car le vecteur $\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}, \frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$ est un vecteur unitaire porté par la perpendiculaire abaissée du point (x, y, z) sur la droite $z = x - y = 0$ de xOy, dans le sens qui s'écarte de cette droite; le vecteur $\frac{\partial\rho'}{\partial x}, \frac{\partial\rho'}{\partial y}, \frac{\partial\rho'}{\partial z}$ est défini de la même manière au moyen de la droite $z = x + y = 0$. Donc leur somme et leur différence géométrique sont les bissectrices d'un même angle : à ce titre, elles sont donc rectangulaires [1].

Considérons l'intersection de deux surfaces S_k. Le long de cette courbe ρ et ρ' restent constants, car $\rho + \rho'$ sera constant sur l'une de nos surfaces et $\rho - \rho'$ sur l'autre. On s'explique ainsi ce résultat, que fournirait aisément un calcul régulier consistant à faire tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oz ; l'intersection à distance finie de deux S_k se compose de deux biquadratiques. Chacune d'elles se projette sur un plan $y = \pm x$ (du premier système d'axes) suivant un cercle (ρ = const. ou ρ' = const.).

VI et VII. — Nous nous bornerons à donner les composantes du champ vectoriel X, Y, Z

$$X = \frac{x}{x^2 - y^2}, \qquad Y = \frac{y}{y^2 - x^2}, \qquad Z = -\frac{1}{2z},$$

lequel conduit aux surfaces de niveau

$$(\Sigma) \qquad x^2 - y^2 = 2Cz.$$

L'intersection d'une Σ et d'une S_k se décompose en deux biquadratiques, car en écrivant l'équation de S_k

$$(x^2 - k^2)(y^2 - k^2) = 2k^2z^2,$$

on voit que les deux dernières équations définissent $x^2 - k^2$ et $y^2 - k^2$ par leur différence et leur produit. On trouve ainsi

$$x^2 - k^2 = (C + \varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2})z,$$
$$y^2 - k^2 = (-C + \varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2})z,$$

d'où les deux surfaces de révolution demandées

$$x^2 + y^2 = 2k^2 + 2\varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2}z, \qquad \text{(paraboloïdes).}$$

Prenons une des biquadratiques constituant l'intersection de Σ et de S_k. Il passe par cette courbe un faisceau linéaire ponctuel de quadriques, contenant

---

(1) Comparer l'*Initiation aux méthodes vectorielles*, de Bouligand et Rabaté, chap. vi. Les surfaces actuelles sont les surfaces de niveau des champs scalaires $\rho + \rho'$ et $\rho - \rho'$ dont les gradients, qui se déduisent par addition et soustraction géométrique de deux vecteurs unitaires, sont orthogonaux.

notamment un paraboloïde homofocal à Σ : cette surface admet donc les mêmes plans tangents que S_k le long de la biquadratique. Son équation est

$$\frac{x^2}{C + \varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2}} + \frac{y^2}{-C + \varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2}} = 2z + \varepsilon\sqrt{C^2 + 2k^2}.$$

Il est manifeste qu'il constitue nécessairement la surface de degré minimum possédant cette propriété (puisque cette surface doit contenir une biquadratique gauche).

TABLE DES MATIÈRES

COMPLÉMENTS

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.